WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

20. November 2013

ZÜ VI

Übersicht:

1. Übungsbetrieb
2. Fragen, Anregungen?
3. Thema: Herleitungskalkül des natürlichen Schließens
4. Thema: Prädikatenlogische Ausdrücke
5. Ergänzung Blatt 5: Resolution als Herleitung
6. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 6

1. Übungsbetrieb

Änderung der Anfangszeit der Zentralübung ab sofort
(siehe Webseite der ZÜ):

Zentralübung: Mittwoch, 17.00 - 18.30 Uhr, Hörsaal MW 0001

Ausnahme:
Am 5. Februar 2014 findet die ZÜ von 17.45 bis 19.15 Uhr statt
(wie bisher).

2. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

3. Thema: Herleitungskalkül des natürlichen Schließens

Kalküle des natürlichen Schließens gehen auf Gerhard Gentzen zurück.

Diese Kalküle formalisieren jene Schlußweisen, mit denen man Beweise in der mathematischen Literatur verständlich führen kann.

Wir werden dies an einem Beispiel eines Beweises studieren, den wir zunächst in natürlicher Weise führen werden, um ihn dann in direkter Entsprechung im Kalkül nachzubilden.

3.1 Modus Tollens

Aufgabe:

Der ,,Modus Tollens" (Schlussart der ,,Aufhebung") bezeichnet eine logische Inferenz der Form

$$((F \to G) \wedge \neg G) \to \neg F\,.$$

Zeigen Sie die Korrektheit des Modus Tollens mit Hilfe des Herleitungskalküls des natürlichen Schließens gemäß Vorlesung.

Zu beweisen ist also:

$$\models \ ((F \to G) \wedge \neg G) \to \neg F\,.$$

mit Hilfe von

$$\vdash \ ((F \to G) \wedge \neg G) \to \neg F\,.$$

F und G sind Formelvariable (Schemavariable), d. h. Platzhalter für aussagenlogische Formeln.

Ersetzt man beispielsweise F bzw. G jeweils durch aussagenlogische Variablen p bzw. q, dann erhält man die Formel

$$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$$

Bemerkung:

Diese Formel ist ein Beispiel einer logischen Inferenz, da wir alle Implikationen so nennen können.

Die Inferenz nennen wir korrekt genau dann, wenn die Implikation (allgemein-)gültig ist, und schreiben in diesem Fall

$$\models \; ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$$

Man beachte:

$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ ist eine Formel, nämlich eine Implikation.

Aber

$\models \; ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ ist das Urteil der Allgemeingültigkeit der Formel, in Worten $\neg p$ „folgt aus“ $(p \to q) \land \neg q$.

Die Korrektheit des Modus Tollens zu beweisen, heißt also, für alle Formeln F und G die folgende Aussage zu beweisen.

$$\models \ ((F \to G) \land \neg G) \to \neg F \,.$$

Dieser Beweis ist bereits dann erbracht (siehe Vorlesung für die Ersetzung von Formelvariablen durch Aussagenvariable), wenn Folgendes für die aussagenlogischen Variablen p und q gezeigt wird.

$$\models \ ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p \,.$$

Die Folgerungsbeziehung $\models$ begründet eine Relation zwischen aussagenlogischen Formeln. Sie steht in enger Beziehung zur Relation $\vdash$, die mit dem Herleitungskalkül definiert wird.

3.2 Herkömmlicher Beweis

Wir beweisen nun in herkömmlicher oder natürlicher Weise die Korrektheit der Inferenz

$$\models \; ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$$

Beweisidee:

Wir nehmen $(p \to q) \land \neg q$ an und beweisen, dass die Annahme p einen Widerspruch erzeugt.

$$\models \; ((p \rightarrow q) \land \neg q) \rightarrow \neg p$$

Beweis:

1. Wir nehmen an, dass $(p \rightarrow q) \land \neg q$ gilt.

   Kommentar: Nun führen wir die Annahme von p zum Widerspruch.
2. Wir nehmen also p an.
3. Es gilt nach (1) auch $(p \rightarrow q)$.
4. Damit folgt q.
5. Andererseits gilt wegen (1) auch $\neg q$.
6. Damit folgt $q \land \neg q$, d.h. ein Widerspruch.
7. Annahme (2) kann also verneint werden $\neg p$.
8. Es folgt die zu beweisende Implikation.

3.3 Beweis durch Herleitung

Lösung der ursprünglichen Aufgabe:

Wir beweisen nun die Korrektheit der obigen Inferenz formal mit Hilfe des Herleitungskalküls für die Relation $\vdash$, also

$$\vdash ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$$

Wir stellen die Herleitung in Form einer Tabelle dar, in der die Folge der Urteile mit Kommentaren aufgelistet wird.

Nr.	Annahmemenge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$(p \to q) \land \neg q,\, p$	$\vdash$	$(p \to q) \land \neg q$	Annahmeregel
2.	$(p \to q) \land \neg q,\, p$	$\vdash$	p	Annahmeregel
3.	$(p \to q) \land \neg q,\, p$	$\vdash$	$(p \to q)$	1.+Konj.-Beseit.
4.	$(p \to q) \land \neg q,\, p$	$\vdash$	q	2.+3.+Impl.Beseit.
5.	$(p \to q) \land \neg q,\, p$	$\vdash$	$\neg q$	1.+Konj.-Beseit.
6.	$(p \to q) \land \neg q,\, p$	$\vdash$	false	5.+4.+false-Regel
7.	$(p \to q) \land \neg q$	$\vdash$	$\neg p$	6.+Neg.-Einf.
8.		$\vdash$	$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$	7.+Impl.-Einf.

Bemerkungen:

Man beachte, dass die linke Seite einer Inferenz $\mathcal{A} \vdash F$ stets eine Konjunktion von Formeln bedeutet. Diese Konjunktion wird zur Abkürzung häufig mit Komma geschrieben. Wie oben zu sehen ist, sind auch Mischungen möglich.

Wir haben damit gezeigt, dass die Inferenz $((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ mit den Regeln des Herleitungskalküls hergeleitet werden kann. Da der Herleitungskalkül korrekt ist, folgt daraus
$\models \; ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p\,.$

4. Thema: Prädikatenlogische Ausdrücke

4.1 Schrittweiser Beweis

Aufgabe:

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum $\mathbb{R}$.

Seien P und Q einstellige Prädikate, für die die folgende Aussage gilt:

$$\exists x\, P(x) \quad \wedge \quad \forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Man zeige:

$$\text{Dann gilt } \ \exists x\, Q(x)\,.$$

Lösung:

Wir lösen die Formeln schrittweise auf und fügen anschließend die zu beweisende Aussage zusammen.

Nach Voraussetzung gilt die Aussage $\exists x\, P(x)$.

Deshalb können wir von einem $a \in \mathbb{R}$ mit Eigenschaft $P(a)$ als ein bereits bestimmtes Element ausgehen. Von diesem a ist allerdings nur bekannt, dass $P(a)$ gilt.

Sei also irgendein $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $P(a)$ gegeben.

Da nach Voraussetzung die Aussage $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$ ebenfalls gilt, bedeutet dies für das bestimmte a, dass die Aussage

$$P(a) \to Q(a)$$

gilt.

Es gelten also die beiden Aussagen $P(a)$ und $P(a) \to Q(a)$.

Daraus können wir mit Modus ponens folgern, dass gilt

$$Q(a)\,.$$

Da wir nun ein Element a sozusagen konstruiert haben, für das $Q(a)$ gilt, haben wir bewiesen, dass die folgende Aussage gilt:

$$\exists x\, Q(x)\,.$$

W.z.b.w.

4.2 Verneinung und DeMorgan

Aufgabe:

Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat P die folgende Aussage F gilt:

$$\forall x \, \exists y \, \forall z \, P(x, y, z) \, .$$

Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel her, die äquivalent ist zu

$$\neg F \, .$$

Erklärung:

Bei pränexen Formeln stehen alle Quantoren vorne.

Lösung:

Wenn *nicht* für alle $x \in \mathbb{R}$
die Eigenschaft $Q(x)$ gilt,
dann ist dies gleichbedeutend damit, dass

für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$
die Eigenschaft $Q(x)$ *nicht* gilt.

Für alle Formeln $\forall x\, Q(x)$ gilt also nach DeMorgan

$$\neg\forall x\, Q(x) \;\equiv\; \exists x\, \neg Q(x)\,.$$

Entsprechend gilt

$$\neg\exists x\, Q(x) \;\equiv\; \forall x\, \neg Q(x)\,.$$

Achtung: die Formel $\neg\forall x\, Q(x)$ ist nicht in pränexer Form.

Wir wenden diese Umformungsregel (nach DeMorgan) nun auf $\neg F$ an wie folgt.

$$
\begin{aligned}
\neg F &\equiv \neg\forall x\,\exists y\,\forall z\,P(x,y,z) \\
&\equiv \exists x\,\neg\exists y\,\forall z\,P(x,y,z) \\
&\equiv \exists x\,\forall y\,\neg\forall z\,P(x,y,z) \\
&\equiv \exists x\,\forall y\,\exists z\,\neg P(x,y,z)\,.
\end{aligned}
$$

5. Ergänzung Blatt 5: Resolution als Herleitung

Sei F eine Formel, die als Menge von Klauseln $K_1, K_2, \ldots, K_n$ dargestellt sei.

Es seinen $R = L_1, L_2, \ldots, L_m$ eine Folge von Klauseln.

Dann heißt R eine Resolution der Klausel L_m für die Formel F, falls jede Klausel L_i ein Resolvent von Klauseln L_j mit $j < i$ oder Klausel aus F ist.

6. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 6

ad HA 6.2a:

Die Antworten eines Resolutionsverfahrens sind ,,unerfüllbar" oder ,,erfüllbar".

Um zu zeigen, dass F gültig ist, muss man mit Resolutionsverfahren zeigen, dass $\neg F$ unerfüllbar ist!

ad HA 6.2b:

Siehe Thema Herleitungskalkül des natürlichen Schließens.