WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

27. November 2013

ZÜ VII

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Fragen, Probleme?
   ,,Das Versteh' ich nicht!"

2. Themen: Prädikatenlogische Herleitung
   Beweisarten
   Induktionsbeweise
   Beispiel

3. Hinweise und Tipps
   zu HA von Blatt 7

1. Übungsbetrieb

1.1 Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

Es gab die Anregung, Tutoraufgabe 5.3 über Logikkalküle in der ZÜ zu besprechen.

Mittlerweile allerdings wurden Lösungen von Blatt 5 ins Netz gestellt und können dort studiert werden!

Es gab den Wunsch, von der ttt-Aufzeichnung der ZÜ auch eine mp4-Version ins Netz zu stellen.
Dies wird voraussichtlich ab der nächsten ZÜ geschehen.

1.2 ,,Das Versteh' ich nicht!"

Falsche Lesetechnik? Lesen und hören Sie strukturiert!

Eine Definition wird zunächst syntaktisch funktional analysiert.

Ein inhaltliches Verständnis entsteht in nachfolgenden Schritten.

2. Themen

2.1 Prädikatenlogische Herleitung

Seien P und Q 1-stellige Prädikate des Prädikatenkalküls.
Wir betrachten die Menge $\mathcal{A}$, bestehend aus den beiden Formeln

$$\exists x \; P(x) \qquad \text{und} \qquad \forall x \; (P(x) \to Q(x))\,.$$

Man folgere mit dem Herleitungskalkül der Prädikatenlogik die Inferenz

$$\mathcal{A} \vdash \exists x \, Q(x)\,.$$

Rückverweis:
Die Aussage haben wir in der ZÜ 6 bereits informell und präzise bewiesen.

Protokoll der Regelanwendungen:

Nr.	Annahmen		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\exists x\ P(x)$	Annahmeregel
2.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$P(a)$	Annahmeregel
3.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	Annahmeregel
4.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$P(a) \rightarrow Q(a)$	3.+ Allquantorbes.
5.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$Q(a)$	2.+4.+ Impl.bes.
6.	$\mathcal{A}, P(a)$	$\vdash$	$\exists x\ Q(x)$	5.+ Existenzeinf.
7.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$\exists x\ Q(x)$	1.+6.+ Existenzbes.

Diese Herleitung beschreibt exakt die Vorgehensweise bei schrittweisen Existenzbeweisen, die mit dem Ansatz „Sei a ein Element mit der Eigenschaft $P(a)$“ beginnt.

2.2 Beweisarten

1. *Direkter Beweis*:
   Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

   Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \le i \le n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \; = \; \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \; + \; m \cdot b\right) \, .$$

Bemerkung:

Auch leeren Summen wird ein Wert zugewiesen,
und zwar das jeweilige ,,neutrale“ Element der Operation,
d. h. hier 0 für die leere Summe.

Eine leere Summe liegt z. B. immer dann vor,
wenn der Laufindex i bei i_0 beginnt, aber $n < i_0$ gilt,
d. h. wir setzen $i_0 \leq i \leq n$ voraus.

Lösung:

Intuitiv ist klar, dass die Hinzunahme des Wertes des arithmetischen Mittels zu den Werten, über die das Mittel gebildet wird, das Mittel selbst nicht verändert.

Die entsprechende Rechnung ist wie folgt.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m\cdot b\right) &= \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\\
&= \frac{1}{n+m}\left(1+\frac{m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i\\
&= \frac{1}{n+m}\left(\frac{n+m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\,.
\end{aligned}$$

2. *Indirekter Beweis*:
   Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$.
   Zeigen Sie:

   Verteilt man m Hamster auf n Käfige, so befinden sich in mindestens einem Käfig $k+1$ oder mehr Hamster.

   Führen Sie einen indirekten Beweis, indem Sie annehmen, in allen Käfigen würden sich nach einer Verteilung weniger als $k+1$ Hamster befinden.

Lösung:

Die Voraussetzung $m > n \cdot k$ bezeichnen wir als Aussage A.

Wir bezeichnen die Anzahl der in Käfig i $(1 \leq i \leq n)$ befindlichen Hamster als h_i.

Zu zeigen ist dann die Aussage B mit

$$B = (\exists i, 1 \leq i \leq n)\ [h_i \geq k + 1]\,.$$

Insgesamt haben wir also die Implikation $A \rightarrow B$ zu zeigen.

Indirekter Beweis:
Wir zeigen die Kontraposition von $A \to B$, d. h.

$$\neg B \to \neg A\,.$$

Annahme: Es gelte $\neg B$, d. h., für alle i gelte $h_i < k + 1$.

Wegen $h_i \leq k$ schätzen wir die Gesamtzahl m aller Hamster in den Käfigen ab mit

$$m = \sum_{i=1}^{n} h_i \leq \sum_{i=1}^{n} k = n \cdot k\,.$$

Damit ist die Negation der Voraussetzung $m > n \cdot k$ gezeigt, mithin Aussage $\neg A$.

2.3 Induktionsbeweis

Mit einem Induktionsbeweis beweist man die Wahrheitswerte einer aufgezählten Menge von Aussagen

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

durch eine Aufzählung der Beweise B_i für die Aussagen A_i

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots .$$

Man beweist dabei die erste der Aussagen,
d.h. A_1, und eine Folgerung $A_n \to A_{n+1}$ für beliebiges $n \geq 1$.

Daraus ergibt sich dann eine Aufzählung der Beweise B_i.

Man beachte:

Die Variable n bedeutet lediglich den Index in der Aufzählung der Aussagen A_n bzw. Beweise B_n.

Selbstverständlich beginnt der Index einer Aufzählung bei 1 und ist aufsteigend unendlich.

Die Aussagen A_n haben stets die Form

Es gilt $P(n)$.

Dabei ist $P(n)$ ein Prädikat, das sich auf den Index n bezieht.

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen.

Die Gültigkeit einer Formel

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; P(n) \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt,

anstatt (1) die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} : \; (P(n) \rightarrow P(n+1)) \, . \tag{2}$$

Bemerkung: Wir benützen hier in der Mathematik gebräuchliche Schreibweisen für prädikatenlogische Formeln.

Bemerkung: Das Prädikat $P(n)$ ist häufig nicht identisch mit der Aussage, die man beweisen will. Die Frage der Anpassung des Schemas an z.B. absteigende Folgen ganzer Zahlen oder den Induktionsanfang stellt sich nicht.

Die Anpassung geschieht stets durch

Wahl eines geeigneten Prädikats.

Beim Beweis der Formel (2) geht man wie folgt vor.

Induktionsanfang : Es gilt $P(1)$:

$\ldots$

Induktionsschritt : Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \; (P(n) \Rightarrow P(n+1))\,.$

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme : Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss : Dann gilt $P(n+1)$:

$\ldots$

Soweit das Schema des Induktionsbeweises.

2.4 Beispiel Induktion

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$
die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1 + x)^m \, .$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an
und führen Sie den Induktionsbeweis
für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$
nach dem angegebenen Schema durch.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$.

Wir definieren das Prädikat $P(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $P(n)$ genau dann wahr ist, wenn $1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1}$ gilt, i.Z.

$$P(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad 1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1}\,.$$

Dann haben wir zu zeigen

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; P(n)\,.$$

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:
$P(1)$ bedeutet
$1 + 0 \cdot x \leq (1+x)^0$, d. h. $1 \leq 1$.
Also gilt $P(1)$.

Induktionsschritt: Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \ (P(n) \rightarrow P(n+1))$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Es gilt $P(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= (1+x)^{n-1}(1+x) \\
&\geq (1+(n-1)x)(1+x) \qquad \text{I.A. } P(n) \\
&= 1+(n-1)x+x+(n-1)x^2 \\
&\geq 1+nx\,. \qquad \text{w.z.b.w.}
\end{aligned}
$$

3. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 7

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der DS-Übungsblätter von Prof. Esparza sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 7.1(c):

Die Gleichheit von $x = m$ ist gleichbedeutend mit $x \preceq m \wedge m \preceq x$.

Diese Charakterisierung kann auch in (e) benützt werden.

ad HA 7.2:

„Tarski's World" ist eine Rechner-basierte Einführung in die Logik erster Ordnung von Jon Barwise und John Etchemendy.

Diese Einführung in die Semantik der Prädikatenlogik benutzt Spiele, in denen einfache 3-dimensionale Welten unterschiedliche geometrische Figuren enthalten.
Mit diesen Welten kann man den Wahrheitswert von prädikatenlogischen Formeln testen.

Beachten Sie die Hinweise auf dem Übungsblatt und in der Vorlesung.

Nachtrag!

ad HA 7.4:

(a) Formen Sie zunächst die linke Seite der Äquivalenz nach De Morgan so um, dass der Negationsoperator vor den Prädikatsymbolen steht.
Zeigen Sie u.a., dass $\forall y \neg Q(x, y) \equiv \neg \exists y Q((x, y)$ gilt.

(b) Überprüfen Sie die Äquivalenz mit Strukturen über einem Universum, das nur ein einziges Element enthält.

ad HA 7.5:

(a) Die Prämisse wird schon dadurch erfüllt, dass ein Element x existiert, für das $P(x)$ nicht gilt.
Die Konklusion ist bereits dann falsch, wenn die Menge P_S nicht leer ist und gleichzeitig die Menge Q_S leer ist.

(b) Nun ist die Umkehrung der Implikation in (a) zu betrachten. Tatsächlich ist diese Umkehrung allgemeingültig.