WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

4. Dezember 2013

ZÜ VIII

Übersicht:

1. Übungsbetrieb:	Fragen, Probleme?
2. Lösung	HA 6.2(b)
3. Themen:	Modellbegriff, Nachtrag zu ZÜ 7 Beispiel Wachstum von Funktionen Logarithmusfunktion
4. Hinweise und Tipps	zu HA von Blatt 8

1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

Auf Anregung werden wir HA 6.2(b) lösen.

2. Lösung HA 6.2(b)

Aufgabe:

Es seien A, B, C aussagenlogische Variable und

$$F := ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))\,.$$

Geben Sie einen formalen Beweis an im Kalkül des natürlichen Schließens, dass F gültig ist.

Schrittweise Lösung:

Der Beweis ist erbracht, wenn wir die Prämisse annehmen und die Konklusion beweisen.

Wir nehmen $A \to (B \to C)$ an.

Wir beweisen nun die Konklusion $(A \to B) \to (A \to C)$.

Die zu beweisende Konklusion ist wieder eine Implikation, die wir wieder beweisen, indem wir deren Prämisse annehmen und deren Konklusion beweisen.

Sei also $(A \to B)$ angenommen.

Nun ist die Konklusion $(A \to C)$ zu beweisen.

Dazu nehmen wir wieder die Prämisse A an.

Nun müssen wir C aus den bisher gemachten Annahmen beweisen, womit dann der Beweis abgeschlossen ist.

Zusammenfassung der Annahmen: $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $(A \rightarrow B)$, A.

Beweis von C:

Aus den beiden Annahmen $(A \rightarrow B)$ und A folgt B.

Aus den Annahmen $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ und A folgt $(B \rightarrow C)$.

Damit gilt B und $(B \rightarrow C)$.

Daraus folgt C.

W.z.b.w.

Übertragung des Beweises in den Kalkül:

Alle Annahmen zum Beweis von C werden an den Anfang gestellt.

Annahmemenge: $\mathcal{A} = \{(A \to (B \to C)), (A \to B), A\}$.

Entsprechend: $\mathcal{A} \setminus \{A\} = \{(A \to (B \to C)), (A \to B)\}$

$\mathcal{A} = \{(A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B), A\}:$

Nr.	Ann.menge		Konklusion	Regelanwendung
1.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$	Ann.regel
2.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$(A \rightarrow B)$	Ann.regel
3.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	A	Ann.regel
4.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	$(B \rightarrow C)$	1.+3.+Impl.-Bes.
5.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	B	2.+3.+Impl.-Bes.
6.	$\mathcal{A}$	$\vdash$	C	4.+5.+Impl.-Bes.
7.	$\mathcal{A} \setminus \{A\}$	$\vdash$	$(A \rightarrow C)$	6.+Impl.-Einf.
8.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C))$	$\vdash$	$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	7.+Impl.-Einf.
9.		$\vdash$	F	8.+Impl.-Einf.

Äquivalente Aussagen:

- $\models F$
- **true** $\models F$
- $\models (\textbf{true} \rightarrow F)$

3. Themen

3.1 Modellbegriff, Nachtrag zu ZÜ 7

Das „Modell" ist keine neue semantische Struktur.

Jede Struktur ist in gewisser Weise ein Modell.

Und jedes Modell ist eine Struktur.

In der Vorlesung war deshalb der Modellbegriff entbehrlich und wurde nicht definiert.

Die Bezeichnung „ist Modell von" bezeichnet eine Relation zwischen Strukturen und Formeln.

Definition:

Eine Struktur S ist ein Modell einer Formel F,
oder

S ist ein Modell von F,

falls gilt:

1. Die Struktur S passt zu der Formel F
und
2. die Struktur S erfüllt F (a.a. F ist gültig in S) in dem Sinne, dass gilt $[F](S) = 1$.

3.2 Beispiel Wachstum von Funktionen

Im Folgenden bezeichnet 1 in $o(1)$ die konstante Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert 1 besitzt.

Aufgabe:

1. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums $o(f(n))$:

$$\frac{1}{n+1} \in o(1)\,.$$

Lösung:

Sei $f(n) = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann haben wir zu zeigen

$$\forall c > 0 \ \exists n_c \in \mathbb{N}_0 \ \forall n \geq n_c \ \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right].$$

Wir erfüllen

schrittweise den obigen prädikatenlogischen Ausdruck
von „links nach rechts“ gemäß der Klammerung

$$\forall c > 0 \ \left[\exists n_c \in \mathbb{N}_0 \ \left[\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] \right] \right].$$

Als Erstes nehmen wir ein beliebiges $c > 0$ an.

Für dieses $c > 0$ ist Folgendes nachzuweisen.

$$\exists n_c \in \mathbb{N}_0 \ \left[\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] \right] .$$

Den Existenzbeweis führen wir wieder konstruktiv.
Wir konstruieren ein geeignetes n_c wie folgt:

$$n_c := \left\lceil \frac{1}{c} \right\rceil + 17.$$

Nun müssen wir zeigen, dass gilt

$$\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] .$$

Wir nehmen ein beliebiges n mit $n \geq n_c$ an und haben zu zeigen:

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \, .$$

Wegen $n \geq n_c = \lceil \frac{1}{c} \rceil + 17$ gilt $n > \frac{1}{c}$, mithin $\frac{1}{n} < c$.

Es folgt

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < c \cdot 1 \, .$$

W.z.b.w.

Ein bedeutender Spezialfall dieser Definition ist unter anderer Bezeichnung bekannt. Eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ hat für gegen ∞ strebendes n den Grenzwert 0, i. Z.

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1),$$

wobei 1 hier die konstante Funktion bedeutet, die für alle n den Wert 1 besitzt.

3.3 Logarithmus

Bemerkung :

Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der Potenz p^q.

Die daraus abgeleitete Funktion x^a nennt man Potenzfunktion, und die Funktion a^x Exponentialfunktion mit dem Spezialfall e^x. Die Umkehrung von a^x führt auf die Logarithmusfunktion $\log_a x$.

Wir machen uns mit den Eigenschaften der Logarithmusfunktion vertraut und geben einen direkten Beweis für die folgenden Gleichungen:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}\,, \qquad n^{\ln\ln n} = (\ln n)^{\ln n}\,.$$

Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl x zur Basis b mit

$$\log_b x$$

bezeichnet.
Soll eine Aussage für beliebige Basen gelten, so schreibt man häufig

$$\log x\,.$$

Die wichtige Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}\,.$$

Für $b = e$ bzw. $b = 10$ bzw. $b = 2$ schreiben wir

$$\ln x \quad \text{bzw.} \quad \lg x \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{ld}\, x.$$

Antwort:

Voraussetzung für alle folgenden Formeln ist die Positivität der Parameter, also $0<a$, $0<b$, $0<c$ bzw. $0<n$.

Die Beweise kann man durch Logarithmieren führen.

Zum Beweis einer Gleichung

$$x = y$$

für positive x und y beweist man zunächst

$$\log_d x = \log_d y\,,$$

weil daraus wegen $z = d^{\log_d z}$ sofort $x = y$ folgt.

Wir zeigen also

$$\log_b a^{\log_b c} = \log_b c^{\log_b a}\,, \qquad \ln n^{\ln\ln n} = \ln\,(\ln n)^{\ln n}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \log_b a^{\log_b c} &= (\log_b c)\cdot(\log_b a) \\ &= (\log_b a)\cdot(\log_b c) \\ &= \log_b c^{\log_b a} \end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} \ln n^{\ln\ln n} &= (\ln\ln n)\cdot(\ln n) \\ &= (\ln n)\cdot \ln\,(\ln n) \\ &= \ln\,(\ln n)^{\ln n}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

4. Hinweise und Tipps zu HA von Blatt 8

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der DS-Übungsblätter von Prof. Esparza sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 8.1:

Es gilt $3^{2n} + 7 = 9^n - 1 + 8$.

Inwiefern ist $x^n - 1$ ein interessantes Polynom?

ad HA 8.2:

Die Formel gilt übrigens auch für $n = 0$ (Wert der leeren Summen in der ZÜ), was man durchaus auch zeigen darf.

Man kann also eine umfassendere Formel beweisen, aus der die zu beweisende Formel folgt.
Der Induktionsschritt von n auf $n + 1$ muss dann allerdings für alle $n \geq 0$ funktionieren.

ad HA 8.3:

Für den Induktionsanfang ist zu beweisen, dass die Eigenschaft $P(1)$ (siehe ZÜ 7) gilt.

D. h. in diesem Fall, dass die zu beweisende Formel für f_0 den Wert 0 und für f_1 den Wert 1 liefert.

Wie ist $P(n)$ zu definieren?

ad HA 8.4:

Türme von Hanoi:

1. Man bewege den Turm bis auf die untersten zwei Scheiben zunächst auf einen geeigneten anderen Platz, um dann die untersten zwei Scheiben bewegen zu können.
2. Man beachte, dass die farbliche Reihenfolge der Scheiben erst im letzten Schritt korrekt sein muss.

   Wenn man einen Turm mit Variante (a) nach rechts stellt und anschließend, mit dem gleichen Algorithmus den Turm wieder auf den ursprünglichen Platz zurückstellt, dann wird die farblich korrekte Reihenfolge wiederhergestellt.

   Es spielt keine Rolle, ob zwischendurch die Reihenfolge der Farben vertauscht wurde.
   Dadurch kann man Züge sparen.