WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

11. Dezember 2013

ZÜ IX

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Fragen, Probleme?

2. Thema: Wachstumshierarchie von Funktionen

   Hierarchie und Sätze
   Beispiele

3. Vorbereitung auf zirkuläres Rechnen

   Zirkuläre Operationen
   Rechnen modulo m
   3-D Darstellung der mod-Operation

4. Hin.Ti's zu HA von Blatt 9

1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

2. Thema: Wachstumshierarchie von Funktionen

2.1 Hierarchie und Sätze

Das asymptotische Wachstum von Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ kann durch Einordnung in eine quasilineare Wachstumshierarchie von Funktionen untersucht werden.

Es stehen die folgenden Relationen zur Verfügung:

1. $f \in o(|g|)$, oder $g \in \omega(|f|)$, oder $f \prec g$,
2. $f \in \mathcal{O}(|g|)$, oder $g \in \Omega(|f|)$,
3. $f \in \Theta(|g|)$, oder $f \asymp g$
4. $f \sim g$, d. h. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = 1$.

Bemerkung: Beträge dienen hier dazu, die Forderung der Nichtnegativität von Funktionen zu erfüllen, auf die die Landau-Symbole angewandt werden können.

Nützlich ist die folgende Auswahl aus dieser Hierarchie.

Für alle $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon, c \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < \epsilon < 1 < c$ gilt

$$\begin{aligned}
0 \;&\prec\; 1 \;\prec\; \log\log n \;\prec\; \log n \;\prec\; \log^k n \;\prec\; e^{\sqrt{\log n}} \;\prec\; n^\epsilon \;\prec \\
&\prec\; n \;\prec\; n\log n \;\prec\; n^c \;\prec\; (\log n)^{\log n} \;\prec\; n^{\log n} \;\prec \\
&\prec\; c^n \;\prec\; n! \;\prec\; n^n \;\prec\; c^{c^n} \;\prec\; \ldots
\end{aligned}$$

Man beachte die Beziehungen für asymptotische Gleichheit:

$$\begin{aligned}
n! \;&\sim\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n , \qquad \textit{(Stirling)} \\
\ln n! \;&\sim\; n \ln n \,.
\end{aligned}$$

Die folgenden Sätze über die o.g. Relationen sind leicht zu beweisen, und sie sind nützlich, weil Sie es gestatten, nahezu alle Aufgaben über den Vergleich von Wachstum algebraisch zu beweisen.

Satz 1:

1. $\alpha \in \mathbb{R}^+ \implies \alpha \cdot f \asymp f\,.$
2. $0 \prec f \wedge 1 \prec g \implies f \prec f \cdot g\,.$ (folgt aus (3))
3. $0 \prec h \wedge f \prec g \implies f \cdot h \prec g \cdot h\,.$
4. $h \prec f \implies f + h \sim f\,.$
5. $1 \prec f \prec g \implies e^{|f(n)|} \prec e^{|g(n)|}$ für alle n.

Für die angegebenen Funktionen der o.g. Auswahl gilt:

5. $1 \prec f \prec g \implies 0 \prec \frac{1}{g} \prec \frac{1}{f} \prec 1\,.$

Es gelten einige weitere einfache Eigenschaften.

Die algebraische Behandlung von Wachstumshierarchien stammt von Godfrey Harold Hardy (G.H. Hardy).

Er führte die Klasse der sogenannten logarithmisch-exponentiellen Funktionen ein.

Alle in der Praxis auftretenden Wachstumsfunktionen sind logarithmisch-exponentiell.

Es ist deshalb eine gute Idee, sich eine geeignete Wachstumshierarchie bereitzuhalten.

2.2 Beispiele

Beispiel 1:

$n^2 + n\log n \ \sim \ n^2$:

Da $n\log n \prec n^2$, folgt die Behauptung mit Satz 1.4.

Beispiel 2:

$n^3 + n^2\log n \ \sim \ n^3$:

$n^2\log n \prec n^3$ folgt aus Satz 1.3, der Rest folgt wieder mit Satz 1.4.

Beispiel 3:

$n^3 \ \prec \ n^3\log n$:

Es gilt $1 \prec \log n$. Dann folgt die Behauptung mit Satz 1.2.

Wie wirken sich unterschiedliche Basen von Logarithmen aus?

Beispiel 4:

$\log_a \log_b n^k \;\prec\; \log_c n$:

$$
\begin{array}{rcl}
\log_a \log_b n^k & = & \log_a k + \log_a \log_b n \\
& \sim & \log_a \log_b n \\
& = & \log_a \left(\dfrac{\log_a n}{\log_a b} \right) \\
& = & \log_a \log_a n - \log_a \log_a b \\
& \sim & \log_a \log_a n \\
& \prec & \log_a n \\
& \asymp & \log_c n \,.
\end{array}
$$

Beispiel 5:

$n^{\log n} \prec 2^{n \log n}$:

Wir logarithmieren beide Seiten (nicht die Relation!) mit $\ln$.
Dann gilt für beide Seiten wegen Satz 1.3

$(\log n) \cdot (\ln n) \ \prec \ (n \log n) \cdot \ln 2.$

Mit Satz 1.5 folgt die Behauptung.

Wir beweisen eine Beziehung der Auswahl aus der Hierarchie.

Beispiel 6:

$\log^k n \prec e^{\sqrt{\log n}} \prec n^\epsilon$:

Durch Substitution von $\log^k n$ für n in $1 \prec \ln n \prec n^{\frac{1}{2k}}$ folgt

$1 \prec \ln \log^k n \prec \sqrt{\log n}$.

Außerdem folgt aus $\sqrt{n} \prec \frac{\epsilon}{\log e} n$ durch Substitution von $\log n$ für n die Beziehung $\sqrt{\log n} \prec \epsilon \ln n$.

Mit Satz 1.5 folgt die Behauptung.

Beispiel 7:

Das letzte Beispiel zeigt die alternative Problemlösung mit Rückgriff auf die Definitionen.

1. Man zeige:

$$(\log n^2)^2 \in o(2^{\ln n})\,.$$

$\log$ ohne Angabe der Basis bedeutet, dass die Formel für alle zulässigen Basen zu beweisen ist.

Lösung:

Es ist zu zeigen:

$$\forall c > 0 \; \exists n_c \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_c \; \left[|(\log n^2)^2| < c \cdot 2^{\ln n} \right].$$

Sei b eine beliebige zulässige Basis.

Wir lösen die Formel schrittweise auf.

Sei c eine beliebige reelle Zahl mit $c > 0$.
Nun konstruieren wir ein natürliche Zahl n_c, so dass gilt

$$\forall n \geq n_c \left[(\log n^2)^2 < c \cdot 2^{\ln n} \right].$$

Umformung:

$$(\log_b n^2)^2 = \frac{4}{(\ln b)^2} \cdot (\ln n)^2 < c \cdot 2^{\ln n}.$$

Wir bezeichnen $\ln n$ mit x,
d.h. wir setzen $x = \ln n$,
und wir setzen $k = \frac{4}{(\ln b)^2}$.

Nun benutzen wir die Ungleichung $x^3 < 2^x$ für $x \geq 10$.

Die Ungleichung folgt leicht aus $3 \ln x < x \ln 2$ für $x \geq 10$.

Dann gilt für $x \geq 10$ und $\frac{k}{x} \leq c$

$$k \cdot x^2 = \frac{k}{x} \cdot x^3 < c \cdot 2^x \,.$$

Nun setzen wir $x_c = \max\{10, \frac{k}{c}\}$ und $n_c = \lceil e^{x_c} \rceil$

und erhalten für alle $n \geq n_c$ die gewünschte Ungleichung.

3. Vorbereitung auf zirkuläres Rechnen

3.1 Zirkuläre Operationen

Beispiel:

Operation $(+1)$ auf $\{0, 1, 2, 3\}$:

$$
\begin{aligned}
&0,\\
0+1 &= 1,\\
1+1 &= 2,\\
2+1 &= 3,\\
3+1 &= 0,\\
0+1 &= 1,\\
1+1 &= 2,\\
2+1 &= 3,\\
3+1 &= 0,\\
\ldots & \quad \text{usw.}
\end{aligned}
$$

Bemerkung:

Wesentliche Teile der Algebra werden von zirkulären Operationen beherrscht,
beispielsweise in Form der Potenzierung a^m, falls $a^m = 1$ gilt.

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots,\ a^{m-1},\ a^m\ =\ 1,\ a,\ a^2,\ \ldots\ .$$

Zirkuläres Rechnen ist eine Rechnungsart, die über die Schulmathematik hinausgeht.

Rechnen modulo m

Ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ nennt man

kongruent modulo m, mit $m \in \mathbb{N}$, i. Z.

$$a \equiv b \pmod{m},$$

falls sich a und b um ein ganzzahliges Vielfaches von m unterscheiden, d. h.,

falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt

$$a = b + k \cdot m .$$

Man schreibt auch $a \equiv_m b$ für $a \equiv b \pmod{m}$.
$\equiv_m$ ist eine Äquivalenzrelation über $\mathbb{Z}$,
ja sogar eine „Kongruenzrelation“.

Davon abgeleitet ist die Definition der
Operation $\mathrm{mod} : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$b = a \bmod m \iff a \equiv b \pmod{m} \text{ und } 0 \le b < m\,.$$

Für jedes m ist $\bmod m$ eine unäre Operation über $\mathbb{Z}$.

$a \bmod m$ heißt Rest der natürlichen Division von a durch m.

Achtung: Wir werden in der nächsten Zentralübung ein Quiz für zirkuläres Rechnen veranstalten. Lernen Sie also die folgende Abschnitte.

3.2 Rechnen modulo m

Teil 1:

Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a &\equiv a \bmod m \pmod{m}\,, && (1)\\ (a+b) \bmod m &= [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,, && (2)\\ (a \cdot b) \bmod m &= [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m\,. && (3) \end{aligned}$$

1. Zu beweisen ist: $a \equiv a \bmod m \pmod{m}$

Lösung:

Die Kongruenz modulo m ist definiert durch

$$x \equiv y \pmod{m} \quad :\Longleftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,[\,x = y + k\cdot m\,]\,.$$

Nach Definition von $(a \bmod m)$ gilt für ein bestimmtes $k \in \mathbb{Z}$

$$a \bmod m = a + k\cdot m\,, \quad \text{d. h.} \quad a = a \bmod m + k'\cdot m\,,$$

mithin

$$a \equiv a \bmod m \pmod{m}\,.$$

2. Zu beweisen ist:
$(a+b) \bmod m = [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,.$

Lösung:

Wir setzen linke Seite bzw. rechte Seite der Gleichung

$$\begin{aligned} x &:= (a+b) \bmod m\,, \\ y &:= [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,. \end{aligned}$$

und zeigen $x = y$.

Es gilt $0 \leq x, y < m$ und

$$\begin{aligned} x &= a + b + k_x \cdot m\,, \\ y &= (a \bmod m) + (b \bmod m) + k_y \cdot m\,, \\ (a \bmod m) &= a + k_a \cdot m\,, \\ (b \bmod m) &= b + k_b \cdot m \end{aligned}$$

für gewisse $k_a, k_b, k_x, k_y \in \mathbb{Z}$ und es folgt

$$\begin{aligned} y &= a + k_a \cdot m + b + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\ &= x - k_x \cdot m + k_a \cdot m + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\ &= x + (k_a + k_b + k_y - k_x) \cdot m \\ &= x + k \cdot m\,. \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq x, y < m$ folgt $x = y$.

Analog verläuft der Beweis der Gleichung 3:

$$(a \cdot b) \bmod m = [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m\,.$$

Teil 2:

In enger Beziehung zur mod-Operation steht die ganzzahlige Division $a \operatorname{div} m$ zweier Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

Es gilt

$$a = (a \operatorname{div} m) \cdot m + (a \bmod m)\,.$$

Berechnen Sie:

(i) $5 \text{ div } 4$, (ii) $(-5) \text{ div } 4$, (iii) $(-x) \text{ div } 1$.

(i) $5 \text{ div } 4$:

Seien $a = 5$ und $m = 4$.

Dann gilt

$$(5 \operatorname{div} 4) \cdot 4 \;=\; 5 - (5 \bmod 4) \;=\; 5 - 1 \;=\; 4\,.$$

Es folgt $5 \operatorname{div} 4 = 1$.

(ii) (-5) div 4:

Seien $a = -5$ und $m = 4$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} ((-5)\operatorname{div} 4) \cdot 4 &= -5 - ((-5) \bmod 4) \\ &= (-5 - ((-5+8) \bmod 4)) \\ &= (-5 - 3) = -8\,. \end{aligned}$$

Es folgt $(-5)\operatorname{div} 4 = -2\,.$

(iii) $(-x)$ div 1:

Seien $a = -x$ und $m = 1$.

Dann gilt

$$((-x) \operatorname{div} 1) \cdot 1 \;=\; -x - ((-x) \bmod 1) \;=\; -x - 0 \;=\; -x\,.$$

Es folgt $(-x) \operatorname{div} 1 = -x\,.$

3.3 3-D Darstellung der mod-Operation

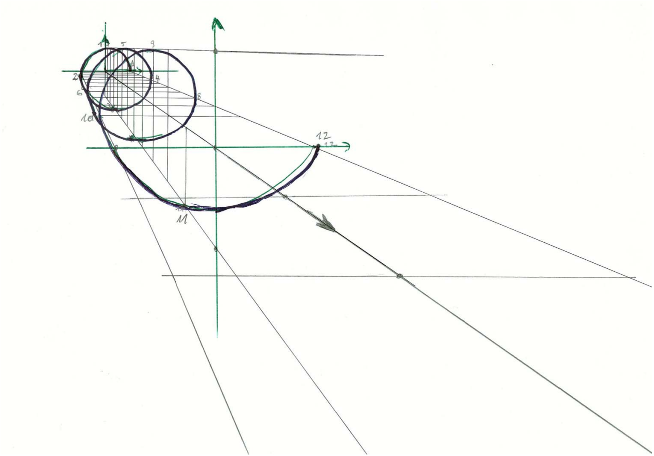
Die Operation $g \bmod m$ mit $m \in \mathbb{N}$ über den ganzen Zahlen $g \in \mathbb{Z}$ eröffnet den Zugang zu zirkulären Operationen.

Für $m = 4$ betrachten wir die folgende Abbildung $f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ für alle $g \in \mathbb{Z}$:

$$f_4(g) = (g, i^{\,(g \bmod 4)})\,.$$

Entwickeln Sie für den Bereich $g \in [-1, 6]$ mit Hilfe der Gauß'schen Ebene der komplexen Zahlen eine 3-dimensionale graphische Darstellung von f_4.

Darstellung:



4. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 9

Blatt 9 lag nicht rechtzeitig vor.

Die Hin.Ti's werden voraussichtlich am Donnerstag ins Netz gestellt werden.