WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

8. Januar 2014

ZÜ XI

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Fragen, Probleme?
2. Thema	Ramsey Zahlen
	Beispiele Sätze
3. Hin.Ti's	zu HA von Blatt 11

1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen, Anregungen?

2. Thema: Ramsey Zahlen

Definition

Wir bezeichnen k Personen, die sich gegenseitig kennen,
als k-Clique.
Wenn sich k Personen gegenseitig nicht kennen, nennen wir diese k-Personengruppe eine k-Anticlique.

Die Begriffe beziehen sich auf eine symmetrische Relation des „sich Kennen“.

Eine entsprechende Definition gibt es für Cliquen bzw. Anticliquen in einfachen Graphen $G = (V, E)$.

Definition

Eine Clique (k-Clique) C in einem einfachen Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge (mit k Elementen) der Knotenmenge V, so dass alle paarweise verschiedenen Knoten aus C über eine Kante aus E verbunden sind.

Eine Anticlique C' (k-Anticlique) in G ist eine Teilmenge der Knotenmenge V, so dass es keine zwei paarweise verschiedenen Knoten aus C' gibt, die über eine Kante verbunden sind.

Beispiele (siehe Tafel)

Auf diese Definitionen stützt sich die Definition der Ramsey-Zahl $R(k,l)$ mit $k,l \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Definition

$R(k,l)$ ist die kleinste natürliche Zahl n (Ramsey-Zahl für k und l) mit der folgenden Eigenschaft (Ramsey-Eigenschaft):

Für **jede** Gruppe G mit mindestens n Personen und **jede** symmetrische „Kennensrelation" gilt, dass G eine k-Clique oder eine l-Anticlique enthält.

Oder gleichbedeutend:

Für **jeden** einfachen Graph $G = (V,E)$ mit mindestens n Knoten gilt, dass G eine k-Clique oder eine l-Anticlique enthält.

Bemerkung

Die obige Definition garantiert noch keineswegs, dass es für alle $k, l \geq 2$ solche Ramsey-Zahlen $R(k, l)$ gibt.

Allerdings zeigen die nachfolgenden Sätze und insbesondere die HA 10.4, dass es tatsächlich solche Zahlen gibt.

2.1 Beispiele

Beispiel 1

$\underline{R(3,3) > 5}$:

Betrachte ein Pentagon mit 5 Knoten (siehe Tafel).

Beispiel 2

$\underline{R(3,4) > 8}$:

Wir konstruieren einen Graph mit 8 Knoten, in dem es weder eine 3-Clique noch eine 4-Anticlique gibt, wie folgt:

Wir ordnen 8 Knoten in einem Kreis an und bestimmen, dass jeder Knoten genau mit seinen Nachbarn und seinem gegenüberliegenden Knoten durch Kanten verbunden ist.

Dann ist klar, dass es keine 3-Cliquen gibt.

Andererseits gilt für jede 4-elementige Teilmenge, dass entweder 2 Nachbarn enthalten sind oder jeder Knoten der Teilmenge nur Nachbarn besitzt, die nicht aus der Teilmenge sind. Dann aber ist jedes Element mit mit dem gegenüberliegenden Knoten aus der Teilmenge verbunden.

Keine Teilmenge kann eine 4-Anticlique sein.

Beispiel 3

$\underline{R(4,4) > 10}$:

„Sechseck im Dreieck“ mit Mittelpunkt.

(Zeichnung siehe Tafel)

2.2 HA 10.4

Satz

1. Für alle $k, l \geq 2$ gilt $R(k, l) = R(l, k)$.
2. Für alle $l \geq 2$ gilt $R(2, l) = k$.

Beweis

1. Bei Kanten-Komplementierung in Graphen gehen Cliquen in Anticliquen über, und umgekehrt.

2. Wenn keine 2-Cliquen vorhanden sind, dann ist die Kantenmenge eines Graphen leer und die Knotenmenge kennzeichnet gleichzeitig die größte Anticlique.

Aufgabe HA 10.4

Man zeige:

Für alle $k, l \geq 3$ gilt die „Pascal“-Rekursion

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)\,.$$

Beweis (siehe M. Aigner)

Es wird Induktion über $k + l \geq 6$ mit Nebenbedingung $k, l \geq 3$ angewandt.

Wegen $R(k, 2) = k$ und $R(2, l) = l$ ist die Existenz genügend vieler Ramsey-Zahlen garantiert, um eine erfolgreiche Induktion durchführen zu können.

Annahme:

Wir nehmen an, dass $R(k-1, l)$ und $R(k, l-1)$ existieren ($\neq \infty$).

Wir zeigen, dass dann $R(k, l)$ existiert und gleichzeitig die obige Ungleichung gilt.

Gegeben sei eine Knotenmenge N mit

$$|N| = n = R(k-1, l) + R(k, l-1)\,.$$

Die Paare von N seien beliebig über Kanten verbunden.

Sei $a \in N$.
Dann zerfällt $N \setminus \{a\}$ in $R \cap B$, wobei $x \in R$ gilt, falls a und x durch eine Kante verbunden ist, und $y \in B$ gilt, falls a und y <u>nicht</u> durch eine Kante verbunden ist.

Da

$$|R| + |B| = R(k-1, l) + R(k, l-1) - 1$$

gilt, folgt

$$|R| \geq R(k-1, l) \quad \text{oder} \quad |B| \geq R(k, l-1)\,.$$

Wir nehmen $|R| \geq R(k-1, l)$ an (der zweite Fall geht analog).

In R gibt es entweder $k-1$ Knoten, die eine Clique bilden.

Dann haben wir zusammen mit a eine k-Clique in N gefunden.

Oder aber es gibt eine l elementige Anticlique in R.

Daraus folgt, dass in N eine l-Anticlique existiert.

Damit hat N die Ramsey-Eigenschaft bezüglich k, l und es folgt

$$R(k, l) \leq |N| \,.$$

W.z.b.w.

Anwendung

Man zeige: Für alle $k, l \geq 2$ gilt $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Beweis durch Induktion:

1. $R(2,l) = l = \binom{l}{1} = \binom{2+l-2}{2-1}$.
2. $R(k,2) = k = \binom{k}{k-1} = \binom{k+2-2}{k-1}$.
3. Induktion über $k + l \geq 4$:

$$\begin{aligned}
R(k,l) &\leq R(k-1,l) + R(k,l-1) \\
&\leq \binom{(k-1)+l-2}{(k-1)-1} + \binom{k+(l-1)-2}{k-1} \\
&= \binom{k+l-3}{(k-1)-1} + \binom{k+l-3}{(k-1)} \\
&= \binom{k+l-2}{k-1}.
\end{aligned}$$

Anwendungen

Beispiel 1: $$5 < R(3,3) \le \binom{3+3-2}{3-1} = \binom{4}{2} = 6\,.$$

Beispiel 2: $$8 < R(3,4) \le \binom{3+4-2}{3-1} = \binom{5}{2} = 10\,.$$

Beispiel 3: $$10 < R(4,4) \le \binom{4+4-2}{4-1} = \binom{6}{3} = 20\,.$$

Bemerkung

Tasächlich kann man sogar $R(3,4) = 9$ beweisen.

3. Hin.Ti's zu HA von Blatt 11

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der DS-Übungsblätter von Prof. Esparza sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 11.1:

(Lösen Sie zuvor HA 11.2)

Die Funktion φ nennt man *Eulersche φ-Funktion*.

Beachten Sie, dass in der Folge $p_1, p_2, \ldots, p_k$ die Folgenglieder paarweise verschieden sind. Die p_i können in n natürlich mehrfach als Faktor auftreten.

Versuchen Sie zunächst, die Spezialfälle $n = p_1^k$ und $n = p_1 \cdot p_2$ zu lösen.

Beachten Sie dabei, dass die Menge $\{l \in [n] \mid \mathrm{ggT}(l,n) = 1\}$ gerade aus denjenigen Zahlen l aus $[n]$ besteht, die durch keine der Primzahlen p_i teilbar sind. Dies bedeutet aber, dass gilt

$$\varphi(n) = \left| \, [n] \setminus \bigcup_{i \in [k]} A_{\{i\}} \, \right| \, .$$

Nach Definition auf dem Blatt gilt übrigens $A_\emptyset = [n]$.

ad HA 11.2:

Seien $A_i = \{i \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap [1000]$ und $A_i' = [1000] \setminus A_i$.

Innerhalb des Universums der Zahlen 1 bis 1000 gilt der Satz von DeMorgan. Es gilt also

$$\overline{A_3 \cup A_5 \cup A_7} = \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}\,.$$

Nun kann zunächst $|A_3 \cup A_5 \cup A_7|$ nach dem Prinzip der Inklusion-Exklusion bestimmt werden.

ad HA 11.6:

Die Zahlen $A_{n,k}$ nennt man *Eulersche Zahlen* und werden a.O. als $E_{n,k}$ bezeichnet.

Man beachte die Gleichungen $A_{n,0} = 1$ und $A_{0,k} = 0$, falls $k \geq 1$ gilt.

Die leere Permutation hat natürlich 0 Anstiege, woraus, wie gehabt, $A_{0,0} = 1$ folgt.

Bitte beachten:

Die Informationsblätter werden nach Bedarf erweitert.