WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

15. Januar 2014

ZÜ XII

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Fragen, Probleme?
2. Thema	Permutationen und Zyklen
	Beispiele Sätze
3. Kombinatorik	Abzählen mit Nebenbedingung
4. Hin.Ti's	zu HA von Blatt 12

1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

2. Thema: Permutationen und Zyklen

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_0, a_1, \ldots, a_{|M|-1})$ ein $|M|$-Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$.

Dann ist die Abbildung

$$\pi_z : M \to M \text{ mit } \pi_z(a_i) = a_{(i+1) \bmod |M|)}$$

ein *Zyklus* der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z.

Für jeden Zyklus π bezeichne $M(\pi)$ die Basis von π.

Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

1. Wie viele Darstellungen
   besitzt ein Zyklus der Länge 3?

   Welchen Zyklus
   stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?

   Welche verschiedenen Darstellungen
   hat ${\pi_z}^3$?

   Ist ${\pi_z}^4$ ein Zyklus ?

Lösung:

Bemerkung:

Für Operationen f über einer Menge M, d.h. $f : M \to M$, gibt es die mehrfache Hintereinanderausführung der Operation f mit entsprechenden Schreibweisen. Es gilt

$$f^2 = f \circ f, \quad \text{und allgemein} \quad f^{n+1} = f \circ f^n \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

d. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in M$

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x))\,, \quad \text{insbesondere } f^2(x) = f(f(x))\,.$$

Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?

Antwort: 3.

Begründung:
Sei π ein Zyklus der Länge 3 mit Basis $M(\pi) = \{a, b, c\}$. Für jede Darstellung $z = (a_1, a_2, a_3)$ von π gilt

$$a_1 \in M, \quad a_2 = \pi(a_1), \quad a_3 = \pi^2(a_1) = \pi(a_2)\,.$$

Damit gibt es genau die folgenden drei Darstellungen

$$z_1 = (a, \pi(a), \pi^2(a))\,, \quad z_2 = (b, \pi(b), \pi^2(b))\,, \quad z_3 = (c, \pi(c), \pi^2(c))\,.$$

Welchen Zyklus stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und
welche Basis hat der Zyklus?

Antwort:

Die Basis von $z = (4, 1, 3, 2)$ ist $M_z = \{1, 2, 3, 4\}$.

Für den dargestellten Zyklus $\pi_z : M \to M$ gilt

$$\pi_z(1) = 3\,, \quad \pi_z(2) = 4\,, \quad \pi_z(3) = 2\,, \quad \pi_z(4) = 1\,.$$

Welche verschiedenen Darstellungen hat ${\pi_z}^3$?

Antwort:

Es gilt

$$\begin{array}{rcl}
{\pi_z}^3(1) & = & {\pi_z}^2(\pi_z(1)) = {\pi_z}^2(3) = \pi_z(\pi_z(3)) = \pi_z(2) = 4\,, \\
{\pi_z}^3(2) & = & {\pi_z}^2(\pi_z(2)) = {\pi_z}^2(4) = \pi_z(\pi_z(4)) = \pi_z(1) = 3\,, \\
{\pi_z}^3(3) & = & {\pi_z}^2(\pi_z(3)) = {\pi_z}^2(2) = \pi_z(\pi_z(2)) = \pi_z(4) = 1\,, \\
{\pi_z}^3(4) & = & {\pi_z}^2(\pi_z(4)) = {\pi_z}^2(1) = \pi_z(\pi_z(1)) = \pi_z(3) = 2\,.
\end{array}$$

${\pi_z}^3$ ist ein Zyklus mit genau den folgenden 4 Darstellungen.

$$z_1{=}(1,4,2,3)\,,\quad z_2{=}(2,3,1,4)\,,\quad z_3{=}(3,1,4,2)\,,\quad z_4{=}(4,2,3,1)\,.$$

Ist ${\pi_z}^4$ ein Zyklus ?

Antwort: Nein!

Begründung:
Es gilt

$$\begin{aligned} {\pi_z}^4(1) &= \pi_z({\pi_z}^3(1)) = 1\,, \\ {\pi_z}^4(2) &= \pi_z({\pi_z}^3(2)) = 2\,, \\ {\pi_z}^4(3) &= \pi_z({\pi_z}^3(3)) = 3\,, \\ {\pi_z}^4(4) &= \pi_z({\pi_z}^3(4)) = 4\,. \end{aligned}$$

${\pi_z}^4$ ist kein Zyklus, weil $|\{(\pi^4)^n(1) \mid n \in \mathbb{N}\}| = 1 \neq 4\,.$

Tatsächlich ist ${\pi_z}^4$ gleich der Identität id.

Zyklen ρ, σ heißen *disjunkt*, falls $M(\rho) \cap M(\sigma) = \emptyset$ gilt, d. h., falls deren Basismengen disjunkt sind.

Eine Menge Z von paarweise disjunkten Zyklen heißt *Zyklenpartition*.

Dabei bildet die Menge der Basismengen

$$P_Z = \{M(\pi)\,;\,\pi \in Z\}$$

eine Mengenpartition der Vereinigung der Basismengen

$$M(Z) = \bigcup_{\pi \in Z} M(\pi)\,.$$

Wir sagen, dass Z eine Zyklenpartition der Menge $M(Z)$ ist.

2. Welche Basis haben die Zyklen zu
$z_1 = (2,5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5,4,3,2,1)$?

   Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!

   Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zyklenpartition von $[5]$?

Welche Basis haben die Zyklen zu
$z_1 = (2, 5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?

Antwort:

Für die Basismengen $M(\pi_{z_i})$ gelten die Gleichungen

$M(\pi_{z_1}) = \{2, 5\}$,
$M(\pi_{z_2}) = \{1\}$,
$M(\pi_{z_3}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!

Antwort:

Es gilt mit Auflistung der Funktionswerte

$$\pi_{z_1}(2) = 5\,, \quad \pi_{z_1}(5) = 2\,.$$

$$\pi_{z_2}(1) = 1\,.$$

$$\pi_{z_3}(1) = 5\,, \quad \pi_{z_3}(2) = 1\,, \quad \pi_{z_3}(3) = 2\,, \quad \pi_{z_3}(4) = 3\,, \quad \pi_{z_3}(5) = 4\,.$$

Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zyklenpartition von $[5]$?

Antwort:

Offenbar sind die Zyklen nicht paarweise disjunkt.

Für die Basismengen gilt z. B. $M(\pi_{z_1}) \cap M(\pi_{z_3}) \neq \emptyset$.

Sei Z eine Zyklenpartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \to [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls} \quad i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z\,.$$

3. Zyklenpartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \ldots z_k$ von Zyklusdarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.

   Sei $Z = (4, 5, 1)(3)(2)$ eine Zyklenpartition.

   Beschreiben Sie die Abbildung f_Z extensional!

Lösung:

Für f_Z gilt mit Auflistung der Funktionswerte

$$f_Z(1) = 4\,, \quad f_Z(2) = 2\,, \quad f_Z(3) = 3\,, \quad f_Z(4) = 5\,, \quad f_Z(5) = 1\,.$$

4. Eine Funktion f sei gegeben durch die folgende Matrixdarstellung.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie
$\{f^i(2)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(3)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(5)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$!

Bestimmen Sie eine *Zyklendarstellung von* f,
d. h. eine Zyklenpartition Z von $[9]$,
so dass $f(i) = f_Z(i)$ für alle $i \in [9]$ gilt!

Lösung:

Durch Auswertung von $f_Z^i(x)$ erhält man

$$\{f_Z^i(2)\,;\, i \in \mathbb{N}\} = \{1,8,4,2\}\,, \quad (1)$$
$$\{f_Z^i(3)\,;\, i \in \mathbb{N}\} = \{6,9,3\}\,, \quad (2)$$
$$\{f_Z^i(5)\,;\, i \in \mathbb{N}\} = \{7,5\}\,. \quad (3)$$

Wir bezeichnen die Mengen in den Gleichungen (1), (2) und (3) entsprechend mit M_1, M_2 bzw. M_3. Dann definiert f je einen Zyklus f_i auf den Basismengen M_1, M_2 und M_3 mit den entsprechenden Darstellungen

$$z_1 = (1,8,4,2)\,, \quad z_2 = (6,9,3) \quad \text{bzw.} \quad z_3 = (7,5)\,.$$

Zyklenpartition bzw. Zyklendarstellung von f:

$$Z = (1,8,4,2)\,(6,9,3)\,(7,5)\,.$$

3. Abzählen mit Nebenbedingung

In einem Rangierbahnhof gibt es 30 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Lösung:

In dieser Aufgabe treten erstmalig Nebenbedingungen auf, deren Beachtung vorbereitende Überlegungen erfordern.

9 Züge benötigen minimal 17 Gleise, wenn man sie möglichst dicht aufeinanderfolgen läßt, denn zwischen den Zügen müssen sich mindestens 8 Gleise befinden.

An den 10 Stellen vor oder nach einem Zug können noch 13 freie Gleise eingefügt werden.

Die Verteilung entspricht einer Zuordnung von $n = 13$ nicht unterscheidbaren Gleisen auf $r = 10$ unterscheidbare Stellen.

Dies entspricht der Anzahl von $n = 13$-elementigen Multiteilmengen einer $r = 10$-elementigen Menge.

Für die gesuchte Anzahl x folgt

$$x = \frac{10^{\overline{13}}}{13!} = \binom{22}{13} = \binom{22}{9} = 22 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 5 = 497420\,.$$

4. Hin.Ti's zu HA von Blatt 12

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der DS-Übungsblätter von Prof. Esparza sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 12.1:

Falls $x, y \in V$, so dass $\{x, y\} \notin E$ gilt. Dann gibt es einen Pfad von x nach y. Auf dem Weg von x nach y muss es einen Knoten b geben, so dass $\{b\} \cup \Gamma(b)$ mindestens 3 Knoten enthält und keine Clique ist.

ad HA 12.2:

Sei n die Anzahl der Knoten. Als Knotengrade kommen nur Zahlen aus $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ in Frage. Wenn ein Knotengrad 0 vorkommt, dann besitzt kein Knoten den Grad $n-1$. Wenn dagegen der Knotengrad 0 nicht vorkommt, dann können ebenfalls höchstens $n-1$ verschiedene Knotengrade angenommen werden.

ad HA 12.3:

Siehe ZÜ 11.