WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

29. Januar 2014

ZÜ XIV

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Fragen, Probleme?
2. Quiz:	Rechnen modulo n
3. Thema	Eulersche Polyederformel
4. Aufgaben	Planare Graphen
	Satz von Kuratowski Spezielle Eigenschaften Bipartite planare Graphen
5. Hin.Ti's	HA von Blatt 14

1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

2. Quiz:

2.1 Rechnen modulo n

Wir rechnen in $\mathbb{Z}_6$ in 3 Minuten, schriftlich!

Wieviel ist:

?

2. Quiz:

2.1 Rechnen modulo n

Wir rechnen in $\mathbb{Z}_6$ in 3 Minuten, schriftlich!

Wieviel ist:

$$
\begin{array}{r|r|r|r|}
1 \cdot 1 = \underline{\quad} & 2 \cdot 2 = \underline{\quad} & 3 \cdot 3 = \underline{\quad} & (-3) = \underline{\quad} \\
1 - 2 = \underline{\quad} & 2 \cdot (-5) = \underline{\quad} & 5^{-1} = \underline{\quad} & (-3) \cdot 3 = \underline{\quad} \\
(1-2)^3 = \underline{\quad} & 2 \cdot (1-5) = \underline{\quad} & (-1)^{-1} = \underline{\quad} & (-4) \cdot (-4) = \underline{\quad}
\end{array}
$$

?

Zusatzfrage: Besitzt 2 ein multiplikatives Inverses 2^{-1} ?

Lösung:

Wir rechnen in $\mathbb{Z}_6$.

$$\begin{array}{rrrr|}
1 \cdot 1 = \underline{\ 1\ } \,| & 2 \cdot 2 = \underline{\ 4\ } \,| & 3 \cdot 3 = \underline{\ 3\ } \,| & (-3) = \underline{\ 3\ } \\
1 - 2 = \underline{\ 5\ } \,| & 2 \cdot (-5) = \underline{\ 2\ } \,| & 5^{-1} = \underline{\ 5\ } \,| & (-3) \cdot 3 = \underline{\ 3\ } \\
(1-2)^3 = \underline{\ 5\ } \,| & 2 \cdot (1-5) = \underline{\ 4\ } \,| & (-1)^{-1} = \underline{\ 5\ } \,| & (-4) \cdot (-4) = \underline{\ 4\ }
\end{array}$$

!

Es gibt kein multiplikatives Inverses von 2, denn 2 ist ein Nullteiler (zu welchem co-Nullteiler?)

3. Thema: Eulersche Polyederformel

Eine der interessantesten Verallgemeinerungen des Begriffs der Bäume, sind die planaren Graphen.

Planare Graphen besitzen eine ,,kreuzungsfreie" Darstellung in der 2-dimensionalen Euklidschen Ebene.

Dabei werden Knoten als Punkte, und Kanten als offene Strecken (Kurven), die zusammen mit den Endknoten eine abgeschlossene Strecke (Kurve) bilden, dargestellt.

Das Mengenkomplement der Darstellung eines Graphen in der Ebene setzt sich aus disjunkten Gebieten zusammen (das sind offene zusammenhängende Mengen der Ebene), die ausschließlich durch Knotenpunkte und Kantenstrecken(Kantenkurven) berandet sind.

Diese Gebiete kann man Darstellungsgebiete zum Graphen G nennen.

Es gibt genau ein Darstellungsgebiet r_∞, das ,,Umgebung des projektiven Punktes ∞" ist. Man nennt diese Menge ein äußeres Gebiet zu G.

Die übrigen Gebiete sind von Knotenpunkten und Kantenstrecken des Graphen als Rand umschlossen. Man nennt diese Gebiete eingeschlossene Gebiete.

Seien R_e die Menge der eingeschlossenen Gebiete eines planaren Graphen G und R die Menge aller Darstellungsgebiete von G.

Es gilt $|R| = |R_e \cup \{r_\infty\}| = |R_e| + 1$.

Beispiele siehe Tafel.

Für planare Graphen $G = (V, E)$ mit der Menge K von Komponenten und der Menge R_e von eingeschlossenen Gebieten gelten die Eulerschen Polyederformeln:

$$|E| + |K| = |V| + |R_e| \,. \tag{1}$$

Offenbar kann die Gleichung wie folgt geschrieben werden:

$$|E| + |K| = |V| + |R| - 1 \,. \tag{2}$$

Aufbau planarer Graphen in der Ebene:

	$\lvert E\rvert$	$+$	$\lvert K\rvert$	$=$	$\lvert V\rvert$	$+$	$\lvert R_e\rvert$
$G = \emptyset$:	0	$+$	0	$=$	0	$+$	0
$+\ v$ Knoten :	0	$+$	v	$=$	v	$+$	0
$+\ b$ Brücken :	b	$+$	$v-b$	$=$	v	$+$	0
$+\ t$ Trennkanten :	$b+t$	$+$	$v-b$	$=$	v	$+$	t
Gesamt :	e	$+$	k	$=$	v	$+$	r_e
Einbettung :	e	$+$	k	$=$	v	$+$	$r-1$

Das Einfügen einer Trennkante zerteilt ein Darstellungsgebiet in zwei Teilgebiete.

Bemerkungen:

- (Mehr als 2) Kanten eines Knoten kann man im Uhrzeigersinn ordnen.
- In der Zeichenebene kann man jeder Kante 2 Seiten (ohne Endpunkte) zuordnen.
- Jede Kantenseite grenzt an genau ein Gebiet.
- Die Ebene zerfällt in endlich viele disjunkte Gebiete und deren Ränder.
- Für jedes Darstellungsgebiet kann man die angrenzenden Kantenseiten zählen.
  Die Summe über alle Gebiete ergibt dann $2|E|$.

Ungleichungen, falls $|E| \geq 2$ gilt

- Falls $|E| \geq 2$ gilt, dann grenzt jedes Darstellungsgebiet an mindestens 3 Kantenseiten.
- Falls $|E| \geq 2$ gilt und G bipartit ist, dann grenzt jedes Darstellungsgebiet an mindestens 4 Kantenseiten.

Es gilt:

$$|E| \leq 3|V| - 3 - 3|K|\,, \tag{1}$$

$$|E| \leq 2|V| - 2 - 2|K| \quad \text{(bipartite Graphen)} \tag{2}$$

Beweis

Eulersche Polyederformel (umgestellt):

$$|E| - |V| + 1 + |K| = |R|\,.$$

(1):
Da jedes Gebiet an mindestens 3 der $2|E|$ Kantenseiten grenzt und jede Kantenseite an genau ein Gebiet grenzt (keine Mehrfachzählung), gilt

$$3|R| \leq 2|E|\,.$$

Es folgt

$$3|E| - 3|V| + 3 + 3|K| = 3|R| \leq 2|E|\,,$$

$$\text{d.h. } |E| \leq 3|V| - 3 - 3|K|\,.$$

(2):

Da ein bipartiter Graph dreiecksfrei ist, grenzt jedes Gebiet an mindestens 4 der $2|E|$ Kantenseiten. Da jede Kantenseite an genau ein Gebiet grenzt (keine Mehrfachzählung), gilt

$$4|R| \leq 2|E|\,.$$

Es folgt

$$4|E| - 4|V| + 4 + 4|K| = 4|R| \leq 2|E|\,,$$

$$\text{d.h. } |E| \leq 2|V| - 2 - 2|K|\,.$$

4. Aufgaben zu planaren Graphen

4.1 Satz von Kuratowski

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graph $K_{3,3}$.

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.
2. Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Ein *vollständiger bipartiter Graph* $K_{m,n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ ist ein bipartiter Graph mit Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2$ und Kantenmenge $E = \{\{a, b\}\,;\, a \in V_1, b \in V_2\}$, wobei V_1 und V_2 disjunkt sind mit $m = |V_1|$ und $n = |V_2|$ Elementen.

Da ein $K_{m,n}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „dem" Graphen $K_{m,n}$.

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.

Lösung:

Unterteilt man einen Graph $G = (V, E)$, dann ersetzt man eine oder mehrere Kanten $e \in E$ durch jeweils einen neuen Pfad.

Die Zwischenknoten und die Kanten des Pfades sind neu, d. h., nicht schon in G enthalten.

Die ersetzte Kante verschwindet.

Den dabei entstehenden Graph $G' = (V', E')$ nennt man Unterteilung von G. Es gilt dann $e \notin E'$.

Jede Unterteilung G'' von G' ist auch eine Unterteilung von G, wobei G kein Teilgraph ist von G' oder G''.

Sei $e = \{a, b\}$ eine Kante von $(V, E) = K_{3,3}$.

Wir entfernen e aus E und fügen einen neuen Knoten $x \notin V$ zu V und 2 Kanten $\{a, x\}, \{b, x\}$ zu E.

Der erhaltene Graph

$$G' = (V \cup \{x\}\,,\,(E \setminus \{e\}) \cup \{\{a, x\}, \{b, x\}\})$$

ist eine Unterteilung von G mit 7 Knoten.

Es gibt grundsätzlich 2 verschiedene Vorgehensweisen, aus $(V, E) = K_{3,3}$ eine Unterteilung mit 8 Knoten zu erhalten.

(i) Man ersetzt eine Kante $e \in E$ durch einen neuen Pfad der Länge 4 (also mit 2 neuen Knoten).

(ii) Man ersetzt zwei Kanten $e, f \in E$ durch je einen neuen Pfad der Länge 3 (also mit je 1 neuen Knoten).

2. Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Lösung:

Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine Kante, dann kann der resultierende Graph R natürlich keine Unterteilung des $K_{3,3}$ mehr enthalten, weil die Anzahl der Kanten dann zu gering ist.

Aber auch eine Unterteilung des K_5 kann nicht mehr in R enthalten sein, weil der K_5 ja 10 Kanten enthält und jede Unterteilung von K_5 mehr als 10 Kanten enthalten müsste.

R ist also nach dem Satz von Kuratowski planar.

4.2 Spezielle Eigenschaften

Beweisen Sie:

1. In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat (Satz der Vorlesung), d. h. einen Knoten der entweder Grad 5 oder einen kleineren Grad hat.
2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.

Wir beweisen:

1. In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.

Lösung:

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph. Dann haben wir zu zeigen, dass ein Knoten x mit $deg(x) \leq 5$ existiert.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, indem wir annehmen, dass alle Knoten aus V mindestens den Grad 6 besitzen, d. h. $deg(x) \geq 6$ gilt, und diese Annahme zum Widerspruch führen.

Sei also $deg(x) \geq 6$ für alle $x \in V$.

Es folgt zunächst $|V| \geq 3$.

Die Summe aller Gradzahlen von Knoten in G ist gleich dem Doppelten der Anzahl der Kanten, d. h. es gilt

$$\sum_{x \in V} deg(x) = 2 \cdot |E|\,.$$

Mithin gilt

$$2 \cdot |E| = \sum_{x \in V} deg(x) \geq |V| \cdot 6\,, \quad \text{d. h.} \quad |E| \geq 3|V|\,.$$

Andrerseits gilt für planare Graphen mit mindestens 3 Knoten nach einem Satz über planare Graphen (siehe Buch von Steger)

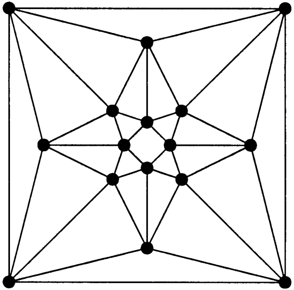
$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6 < 3 \cdot |V|\,.$$

Widerspruch!

Wir beweisen:

2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.

Lösung:



4.3 Bipartite planare Graphen

1. Zeigen Sie, dass **kein** zusammenhängender bipartiter Graph B einen vollständigen Graph K_3 als Teilgraph enthält, d. h., dass jeder zusammenhängende bipartite Graph „dreiecksfrei" ist.
2. Geben Sie einen Spannbaum des vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,5}$ an. Nummerieren Sie dabei die Knoten geeignet. (Übersichtliche Zeichnung genügt).
3. Zeigen Sie für zusammenhängende bipartite Graphen mit mindestens zwei Kanten die Ungleichung

$$|E| \leq 2|V| - 4\,.$$

4. Geben Sie einen planaren Teilgraph $B = (V, E)$ des $K_{3,5}$ mit $|V| = 8$ an, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist. (Übersichtliche Zeichnung genügt).

$$|E| = 2|V| - 4\,.$$

Lösungen

1. Zeigen, dass **kein** zusammenhängender bipartiter Graph B einen vollständigen Graph K_3 als Teilgraph enthält, d. h., dass jeder zusammenhängende bipartite Graph „dreiecksfrei“ ist.

Beweis durch Widerspruch:

Seien K_3 Teilgraph von $B = (V, E)$ und $a, b, c \in K_3$ paarweise verschieden.
Dann läßt sich V in disjunkte Mengen X und Y zerlegen, so dass es kein Paar adjazenter Knoten aus X bzw. Y gibt.

O.B.d.A sei $a \in X$. Da a sowohl zu b als auch zu c adjazent ist, folgt $b, c \in Y$. Damit ist b nicht adjazent zu c. Widerspruch!

2. Geben Sie einen Spannbaum des vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,5}$ an. Nummerieren Sie dabei die Knoten geeignet. (Übersichtliche Zeichnung genügt).

Beweis

Z. B. Spannbaum $T = (V, E)$ mit
$V = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6, 7, 8\}$ und
$E_T = \{\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{1, 6\}, \{3, 6\}\}$.

3. Zeigen Sie für zusammenhängende bipartite Graphen mit mindestens zwei Kanten die Ungleichung

$$|E| \leq 2|V| - 4\,.$$

Beweis

Wir verweisen auf die Ungleichung (2) in Abschnitt 3.
Für zusammenhängende Graphen gilt $|K| = 1$.

4. Geben Sie einen planaren Teilgraph $B = (V, E)$ des $K_{3,5}$ mit $|V| = 8$ an, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist. (Übersichtliche Zeichnung genügt).

$$|E| = 2|V| - 4\,.$$

Beweis

Seien E_T die Kantenmenge des Spannbaums aus der Lösung von Teilaufgabe 2 und
$B = (V, E)$ mit
$E = E_T \cup \{\{1,4\},\{1,5\},\{3,7\},\{3,8\}\} \cup \{\{1,8\}\}\,.$

5. Hin.Ti's zu HA von Blatt 14

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der DS-Übungsblätter von Prof. Esparza sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 14.2:

Wenn ein planarer Graph $G = (E, V)$ mindestens 3 Knoten besitzt, dann kann man stets Kanten einfügen, so dass der entstehende Graph G' planar und zusammenhängend ist, und außerdem mindestens 2 Kanten besitzt.

Nun kann man die Ungleichung (1) aus Abschnitt 3 auf G' anwenden und damit die in der Bemerkung zur Aufgabe behauptete Abschätzung beweisen.

Damit müssen sowohl $|E| \leq 3|V| - 6$ als auch $\overline{E} \leq 3|V| - 6$ gelten.

Wie kann man durch lösen einer geeignete quadratischen Gleichung zeigen, dass $|V| \leq 10$ gelten muss?

ad HA 14.4:

Man beachte:

$$\begin{aligned}
(5 \cdot 5) \bmod 18 &= 7\,, \\
(7 \cdot 5) \bmod 18 &= 17\,, \\
(17 \cdot 5) \bmod 18 &= 13\,, \\
(13 \cdot 5) \bmod 18 &= 11\,, \\
(11 \cdot 5) \bmod 18 &= 1\,.
\end{aligned}$$

Wie folgert man die Gleichung $7^3 \bmod 18 = 1$?