Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2013/14
Informationsblatt 6
3. Januar 2014

Diskrete Strukturen

Hin.Ti's zu HA Blatt 10

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 10.1:

Es ist vorteilhaft, den thematischen Zusammenhang der Aufgabe innerhalb der Kombinatorik herzustellen.

Abstrakt betrachtet bestimmen wir das arithmetische Mittel m der Anzahl von Fixpunkten der Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ über alle $n!$ Permutationen.

Dabei nennt man eine Zahl $i \in [n]$ einen Fixpunkt einer Permutation $\pi : [n] \to [n]$, falls $\pi(i) = i$ gilt. Die Anzahl von Permutationen über $[n]$ mit k Fixpunkten bezeichnet man mit $D_{n,k}$, wobei $k = 0$ und $k \in [n]$ sinnvoll sind.
Offenbar muss nun

$$m = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot D_{n,k}$$

bestimmt werden.

Die Anzahl der Permutationen über $[n]$, die keinen Fixpunkt besitzen, („Totalversetzung“ oder auf französisch „derangement“) wird mit D_n bezeichnet. Es gilt natürlich $D_n = D_{n,0}$.

Wie leicht einzusehen ist, gilt $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k}$, wobei $D_0 = 1$ gesetzt wird.

Zeigen Sie nun durch elementare Rechnung, indem Sie alle $D_{n,k}$ durch D_{n-k} ausdrücken, dass gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot D_{n,k} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} D_{n-1,k-1}$$

Vervollständigen Sie nun die Berechnung von m und beachten Sie dabei, dass $(n-1)! = \sum_{k=1}^{n} D_{n-1,k-1}$ gilt.

ad HA 10.3:

Die Werte der 16 Geschenke seien $n_1, n_2, \ldots, n_{16}$ mit $1 \leq n_i \leq 4000$ für alle $i \in [16]$.
Die Geschenke für die Kinder können als Teilmengen A bzw. B von $\{n_1, n_2, \ldots, n_{16}\}$ mit Wertsummen $w(A) = \sum_{n \in A} n$ bzw. $w(B) = \sum_{n \in B} n$ dargestellt werden.
Dann sind alle Wertsummen stets kleiner als 64000. Andererseits gibt es 65535 nichtleere Teilmengen von [16].

Man überlege sich, warum der Nikolaus dafür sorgen kann, dass A und B disjunkt sind.