Diskrete Strukturen

Hin.Ti's zu HA Blatt 11 (ergänzte Version 2)

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 11.1:

(Lösen Sie zuvor HA 11.2)

Die Funktion φ nennt man *Eulersche φ-Funktion*.

Beachten Sie, dass in der Folge $p_1, p_2, \ldots, p_k$ die Folgenglieder paarweise verschieden sind. Die p_i können in n natürlich mehrfach als Faktor auftreten.

Versuchen Sie zunächst, die Spezialfälle $n = p_1^k$ und $n = p_1 \cdot p_2$ zu lösen.

Beachten Sie dabei, dass die Menge $\{l \in [n] \mid \mathrm{ggT}(l, n) = 1\}$ gerade aus denjenigen Zahlen l aus $[n]$ besteht, die durch keine der Primzahlen p_i teilbar sind. Dies bedeutet aber, dass gilt

$$\varphi(n) = \left| \, [n] \setminus \bigcup_{i \in [k]} A_{\{i\}} \, \right| .$$

Nach Definition auf dem Blatt gilt übrigens $A_\emptyset = [n]$.

ad HA 11.2:

Seien $A_i = \{i \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap [1000]$ und $A_i' = [1000] \setminus A_i$. Innerhalb des Universums der natürlichen Zahlen 1 bis 1000 gilt der Satz von DeMorgan entsprechend. Es gilt also

$$\overline{A_3 \cup A_5 \cup A_7} = \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7} .$$

Nun kann zunächst $|A_3 \cup A_5 \cup A_7|$ nach dem Prinzip der Inklusion-Exklusion bestimmt werden.

ad HA 11.4:

Man beachte zunächst, dass für alle $k < m$ definitionsgemäß $\binom{k}{m} = \left[{k \atop m} \right] = \left\{ {k \atop m} \right\} = 0$ gilt.

Die Beweise führt man per Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Im Fall von (i) zeigt man beispielsweise für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Eigenschaft

$$P_i(n) := \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 : \sum_{0 \le k \le n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} .$$

Der Induktionsanfang $n = 0$ ist elementar. Allerdings benötigt man eine Fallunterscheidung für $m = 0$ bzw. $m > 0$ und entsprechende Vereinfachungen von $P_i(0)$.

Die Beweise für P_i bzw. P_{ii} bzw. P_{iii} sind weitgehend analog.

(ii) Beim Schluss von n auf $n+1$ beachte man die Gleichung $(n+1)^{\underline{n+1-k}} = (n+1)n^{\underline{n-k}}$.

ad HA 11.6:

Die Zahlen $A_{n,k}$ nennt man *Eulersche Zahlen* und werden a.O. als $E_{n,k}$ bezeichnet.

Man beachte die Gleichungen $A_{n,0} = 1$ und $A_{0,k} = 0$, falls $k \geq 1$ gilt. Die leere Permutation hat natürlich 0 Anstiege, woraus, wie gehabt, $A_{0,0} = 1$ folgt.

Bitte beachten: Die Informationsblätter werden nach Bedarf erweitert.