
Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hinweis: Arbeitsblätter in diesem Semester dienen grundsätzlich der selbstständigen Vorbereitung von Hausaufgaben und Tutoraufgaben mit thematischen Schwerpunkten.

Arbeitsblatt 1

Informelle Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist Teil der natürlichen Logik, mit der wir eine sich verändernde Welt logisch analysieren. Die Analyse eines bestimmten realen Vorgangs wird modellartig dargestellt durch ein wohldefiniertes Experiment, das unter gleichen Umständen beliebig oft wiederholbar oder beobachtbar ist und das jeweils mit dem Stattfinden eines Ereignisses aus einer Gesamtheit von möglichen Ereignissen endet. In der Informatik werden Vorgänge präzise durch Algorithmen beschrieben. In der Physik nennt man diese präzisen Beschreibungen „Experimente“. Der Vorgang, der bei „Ausführung“ von (Anweisungen in) Algorithmen bzw. Experimenten „stattfindet“, „erzeugt“ Vorkommen von Ereignissen.

Im Wesen von real durchgeführten Experimenten liegt es nun, dass sich die auftretenden Ergebnisse bei wiederholter Durchführung ein und desselben wohldefinierten Experiments selbst dann unterscheiden können, wenn die Umstände der Durchführungen als völlig gleich angesehen werden, es also keine Information darüber gibt, was die Ursachen von unterschiedlichen Ergebnissen sein könnten. „Zufällig“ nennen wir umgangssprachlich einen Vorgang bzw. einen Prozess, dessen Ergebnis wir prinzipiell nicht im Einzelfall vorhersagen können. Dem Phänomen „Zufall“ begegnen wir mit einer Wahrscheinlichkeitslogik, die vom Einzelfall absieht und stattdessen Gesetzmäßigkeiten für eine Gesamtheit von Einzelfällen formuliert. Diese Gesetzmäßigkeiten bestätigt man durch Häufigkeitsanalysen, die einem theoretischen Gesetz umso näher kommen, je zahlreicher man die Experimente durchführt.

Wahrscheinlichkeitstheorie ist nicht Kombinatorik. Sie beschäftigt sich mit Prozessen, die Ergebnisse zufällig produzieren. Sie ist eine auf die Zählung von Vorgängen angewandte Maßtheorie.

Ereignisalgebra

Im Zentrum einer Wahrscheinlichkeitslogik stehen u. a. die Begriffe „Ereignis“ und „Vorgang“. Ein Ereignis „tritt ein“ oder „kommt vor“ oder „findet statt“ stets als „Ergebnis“ eines Vorgangs. Umgekehrt schließt jeder Vorgang ab mit dem „Eintreten“ oder „Vorkommen“ eines Ereignisses, das sein Ergebnis darstellt.

Das Eintreten eines Ereignisses wird durch eine Aussage festgestellt. Insofern besitzt die Gesamtheit der möglichen Ereignisse eines Experiments oder Versuchs \mathcal{V} stets die Struktur

der Gesamtheit von Aussagen der Art, dass ein Ergebnis x mit einer Eigenschaft E aufgetreten ist. Die Struktur der möglichen Ereignisse eines Experiments ist also eine Boolesche Algebra. Die möglichen Ereignisse bilden in ihrer Gesamtheit eine Boolesche Algebra, die man auch „Ereignisalgebra“ nennt.

Wie jede Boolesche Algebra, so ist auch eine Ereignisalgebra isomorph einer Mengenalgebra \mathcal{A} , die aus Teilmengen einer Basismenge Ω besteht, wobei $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\Omega \in \mathcal{A}$ gelten. Die Elemente von Ω nennt man in diesem Zusammenhang auch „Elementarereignisse“ oder Ergebnisse, insbesondere nennt man Ω die Ergebnismenge der Ereignisalgebra. Jedes Element $A \in \mathcal{A}$ nennt man ein Ereignis. Man beachte, dass ein sogenanntes Elementarereignis $x \in \Omega$ kein Ereignis ist, da $x \notin \mathcal{A}$ gilt. Die Ergebnismenge Ω ist der Träger der Menge \mathcal{A} der Ereignisse.

Sei $A \in \mathcal{A}$. Wenn bei Durchführung des Experiments \mathcal{V} das Ergebnis $x \in \Omega$ auftritt und $x \in A$ gilt, dann hat das Ereignis A stattgefunden. Falls $x \notin A$ gilt, dann hat das Ereignis A nicht stattgefunden, wohl aber das Ereignis \bar{A} , d.h. das Komplement von A in Ω .

Häufigkeit

Ein wesentliches Bestimmungsmerkmal von Vorgängen ist deren „Wiederholbarkeit“. Grundsätzlich können sich Vorgänge wiederholen mit „gleichen“ Ereignisvorkommen im Ergebnis. Man denke z. B. an die wiederholte Ausführung von Algorithmen oder Experimenten in einem gleichen Kontext. Ereignisse können „mehrfach vorkommen“ und alle Vorkommen eines bestimmten Ereignisses sind gleich. Die Kardinalität der Multimenge der Vorkommen eines Ereignisses bei definierter wiederholter Ausführung eines Experiments nennt man „Häufigkeit“ des Ereignisses. Häufigkeiten sind stets natürliche Zahlen, also insbesondere endliche Zahlen.

Abstrakt wird der Begriff der Häufigkeit durch Multimengen beschrieben, wobei eine „Multimenge“ als eine Zusammenfassung von Vorkommen von Elementen einer Menge definiert wird. Der Multimengenbegriff ist ein zentraler Begriff der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Wahrscheinlichkeit

Es ist prinzipiell nicht möglich, eine „Menge“ zu bilden über „zukünftige“ Vorkommen von Ereignissen oder Wiederholungen von Experimenten. Zukünftiges kann nur Gegenstand von „Hypothesen“ sein. Es ist aber prinzipiell möglich, Gesetzmäßigkeiten aufzustellen, denen jede Hypothesenbildung unterworfen sein muss.

Das System der „Wahrscheinlichkeit“ von Ereignissen eines gegebenen Kontextes ist ein System von hypothetischen Grenzwerten der „relativen Häufigkeit“ dieser Ereignisse. Damit ist jedem Ereignis A eine nicht negative reelle Zahl $P(A)$ zwischen 0 und 1 zugeordnet. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von (abzählbar vielen) Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen, ist die Summe der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der einzelnen Ereignisse.

Das Tupel (\mathcal{A}, P) einer Mengenalgebra \mathcal{A} von sogenannten Ereignissen und der Funktion P mit den genannten Eigenschaften nennt man auch Wahrscheinlichkeitsalgebra mit „Wahrscheinlichkeitsmaß“ P . Falls \mathcal{A} eine σ -Algebra ist, dann nennt man (Ω, \mathcal{A}, P) einen Kolmogoroffschen Wahrscheinlichkeitsraum.