

11 Abstrakte Datentypen

Erinnerung:

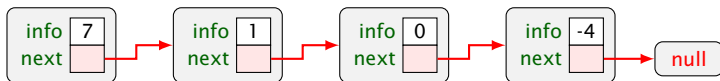
- ▶ Abstrakter Datentyp spezifiziert nur die Operationen
- ▶ Implementierung und andere Details sind verborgen

11.1 Listen

Nachteil von Feldern:

- ▶ feste Größe
- ▶ Einfügen neuer Elemente nicht möglich
- ▶ Streichen ebenfalls nicht

Idee: Listen



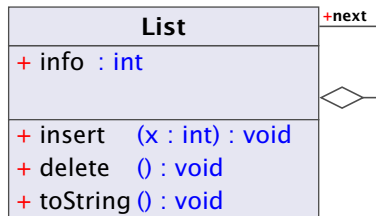
Listen – Version A

- `info` : Datenelement der Liste;
- `next` : Verweis auf nächstes Element;
- `null` : leeres Objekt.

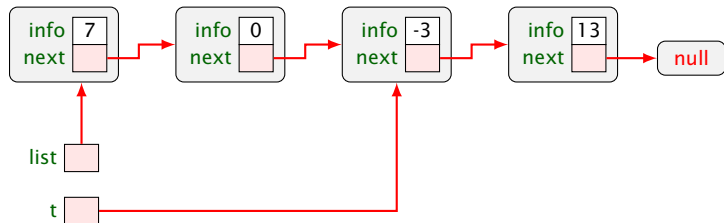
Operationen:

- `void insert(int x)` : fügt neues `x` hinter dem aktuellen (ersten) Element ein;
- `void delete()` : entfernt Knoten hinter dem aktuellen (ersten) Element;
- `String toString()` : liefert eine `String`-Darstellung.

Modellierung als UML-Diagramm:

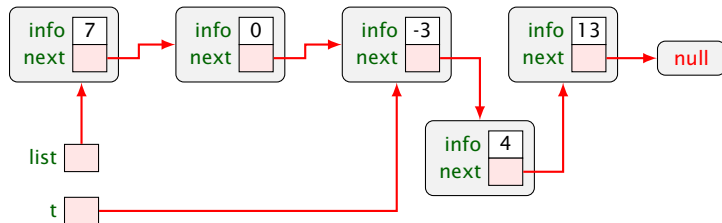


Listen - Insert

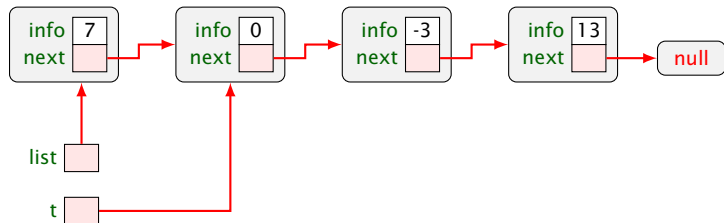


`t.insert(4)`

Listen - Insert

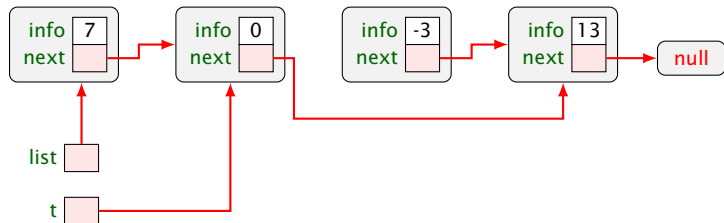


Listen - Delete



`t.delete()`

Listen - Delete



Weitere Operationen:

- ▶ Liste auf Leerheit testen
- ▶ Neue Listen erzeugen (\Rightarrow Konstruktoren)
 - ▶ z.B. eine einelementige Liste
 - ▶ eine bestehende Liste verlängern
- ▶ Umwandlung zwischen Listen und Feldern...

Listen - Implementierung

```
1 public class List {
2     public int info;
3     public List next;
4
5     // Konstruktoren:
6     public List (int x, List l) {
7         info = x;
8         next = l;
9     }
10    public List (int x) {
11        info = x;
12        next = null;
13    }
14 // continued...
```

Listen - Implementierung

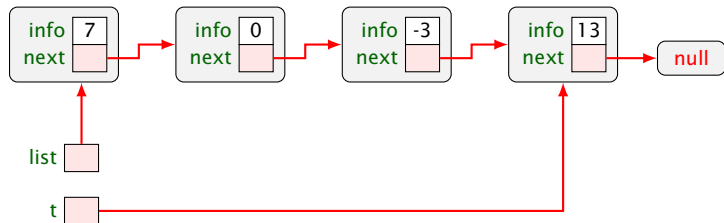
```
15 // Objekt-Methoden:
16 public void insert(int x) {
17     next = new List(x,next);
18 }
19 public void delete() {
20     if (next != null)
21         next = next.next;
22 }
23 public String toString() {
24     String result = "[" + info;
25     for(List t = next; t != null; t = t.next)
26         result = result + ", " + t.info;
27     return result + "]";
28 }
29 // continued...
```

- ▶ Die Attribute sind `public` und daher beliebig einsehbar und modifizierbar; sehr fehleranfällig.
- ▶ `insert()` legt einen neuen Listenknoten an, und fügt ihn hinter dem aktuellen Knoten ein.
- ▶ `delete()` setzt den aktuellen `next`-Verweis auf das übernächste Element um.

Achtung:

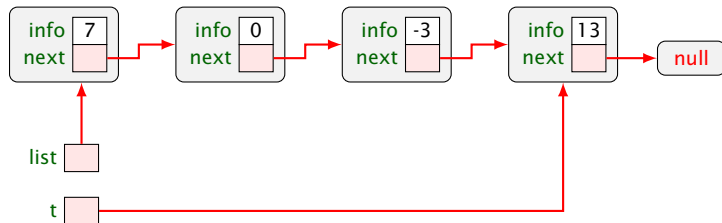
Wenn `delete()` mit dem letzten Listenelement aufgerufen wird, zeigt `next` auf `null`; wir tun dann nichts...

Listen - Delete



`t.delete()`

Listen - Delete

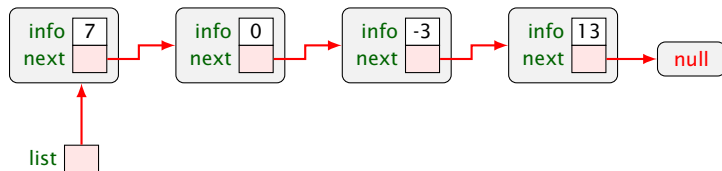


Weil Objektmethoden nur für von `null` verschiedene Objekte aufgerufen werden können, kann die leere Liste nicht mittels `toString()` als `String` dargestellt werden.

Der Konkatenations-Operator `+` ist so schlau, vor Aufruf von `toString()` zu überprüfen, ob ein `null`-Objekt vorliegt. Ist das der Fall, wird "null" ausgegeben.

Für eine andere Darstellung benötigen wir eine Klassenmethode `toString(List l)`;

Listen - toString()



```
write("" + list);
```

liefert: „[7, 0, -3, 13]“

Listen - toString()



```
write("" + list);
```

liefert: „null“

Listen - Implementierung

```
30 // Klassen-Methoden:
31 public static boolean isEmpty(List l) {
32     return (l == null);
33 }
34 public static String toString(List l) {
35     if (l == null)
36         return "[]";
37     else
38         return l.toString();
39 }
40 // continued...
```

Listen - Implementierung

```
41     public static List arrayToList(int[] a) {
42         List result = null;
43         for(int i = a.length-1; i >= 0; --i)
44             result = new List(a[i], result);
45         return result;
46     }
47     public int[] listToArray() {
48         List t = this;
49         int n = length();
50         int[] a = new int[n];
51         for(int i = 0; i < n; ++i) {
52             a[i] = t.info;
53             t = t.next;
54         }
55         return a;
56     }
57     // continued...
```

Listen - Implementierung

- ▶ Damit das erste Element der Ergebnisliste `a[0]` enthält, beginnt die Iteration in `arrayToList()` beim **größten** Element.
- ▶ `listToArray()` ist als Objekt-Methode realisiert und funktioniert darum nur für **nicht-leere** Listen.
- ▶ Wir benötigen die Länge einer Liste:

```
58     private int length() {
59         int result = 1;
60         for(List t = next; t != null; t = t.next)
61             result++;
62         return result;
63     }
64 } // end of class List
```

Listen – Implementierung

- ▶ Weil `length()` als `private` deklariert ist, kann es nur von den Methoden der Klasse `List` benutzt werden.
- ▶ Damit `length()` auch für `null` funktioniert, hätten wir analog zu `toString()` auch noch eine Klassen-Methode `int length(List l)` definieren können.
- ▶ Diese Klassen-Methode würde uns ermöglichen, auch eine Klassen-Methode `static int[] listToArray (List l)` zu definieren, die auch für leere Listen definiert ist.

Mergesort – Sortieren durch Mischen

Mergesort ist ein schneller Sortieralgorithmus der auf auf der Mischoperation beruht.



John von Neumann (1945)

Mergesort – Sortieren durch Mischen

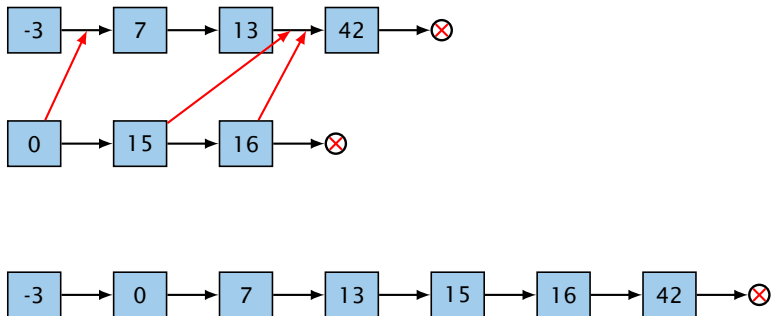
Die Mischoperation

Input: zwei sortierte Listen

Output: eine gemeinsame sortierte Liste

Später bauen wir damit einen Sortieralgorithmus...

Beispiel – Mischen

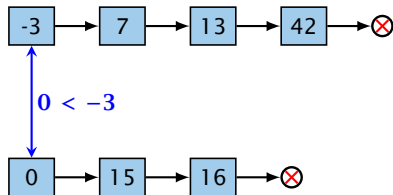


Mergesort – Sortieren durch Mischen

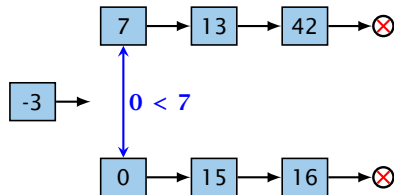
Idee:

- ▶ Konstruiere sukzessive die Ausgabe-Liste aus den der Argument-Listen.
- ▶ Um das nächste Element für die Ausgabe zu finden, vergleichen wir die beiden kleinsten Elemente der noch verbliebenen Inputlisten.
- ▶ Falls m und n die Längen der Argumentlisten sind, sind offenbar maximal nur $m + n - 1$ Vergleiche nötig.

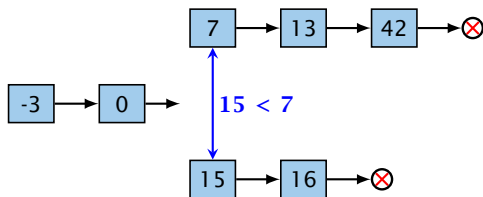
Beispiel – Mischen



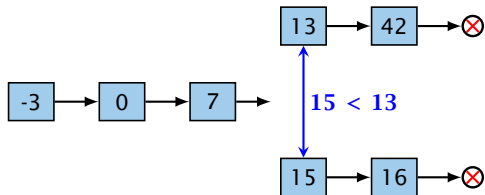
Beispiel – Mischen



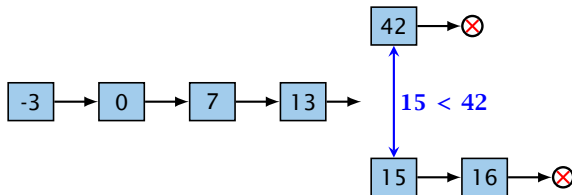
Beispiel – Mischen



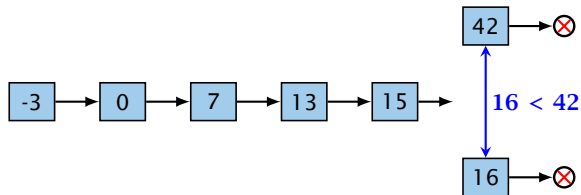
Beispiel – Mischen



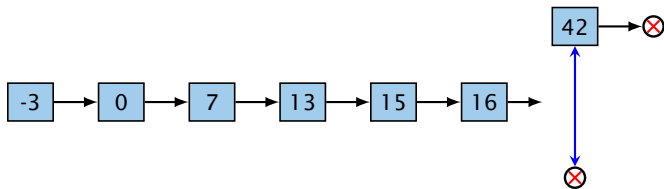
Beispiel – Mischen



Beispiel – Mischen



Beispiel – Mischen



Beispiel – Mischen



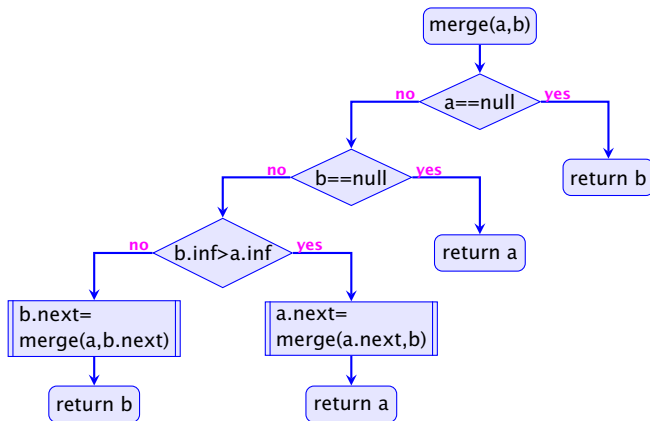
Rekursive Implementierung

- ▶ Falls eine der beiden Listen **a** und **b** leer ist, geben wir die andere aus.
- ▶ Andernfalls gibt es in jeder der beiden Listen ein erstes (kleinstes) Element.
- ▶ Von diesen beiden Elementen nehmen wir ein kleinstes.
- ▶ Dahinter hängen wir die Liste, die wir durch Mischen der verbleibenden Elemente erhalten. . .

Mergesort – Implementierung

```
1 public static List merge(List a, List b) {
2     if (b == null)
3         return a;
4     if (a == null)
5         return b;
6     if (b.info > a.info) {
7         a.next = merge(a.next, b);
8         return a;
9     } else {
10        b.next = merge(a, b.next);
11        return b;
12    }
13 }
```

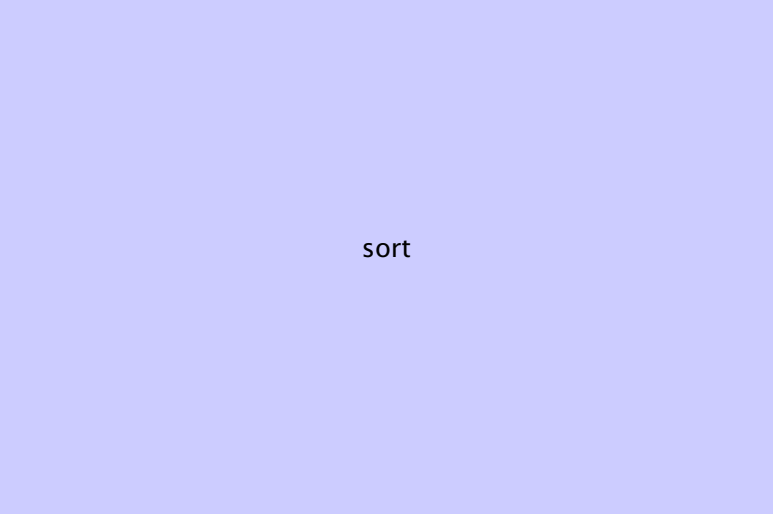
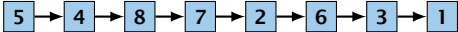
Kontrollfluss



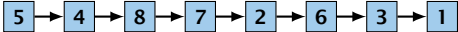
Sortieren durch Mischen:

1. Teile zu sortierende Liste in zwei Teillisten;
2. sortiere jede Hälfte für sich;
3. mische die Ergebnisse!

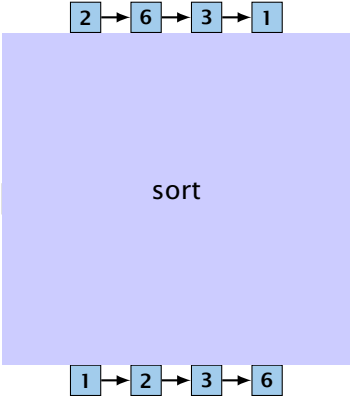
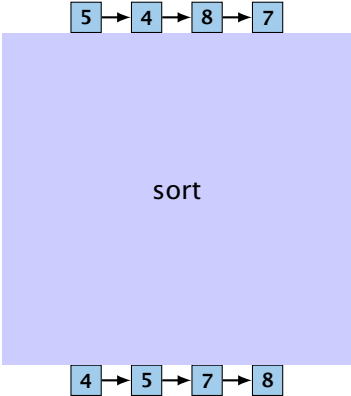
Mergesort



Mergesort



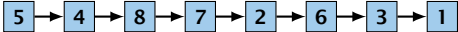
split



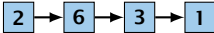
merge



Mergesort

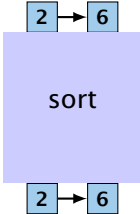


split



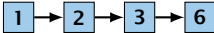
split

split



merge

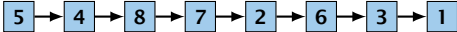
merge



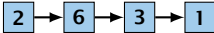
merge



Mergesort



split



split

split

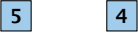


split

split

split

split



merge

merge

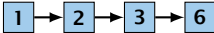
merge

merge

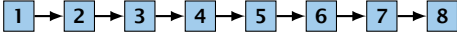


merge

merge



merge



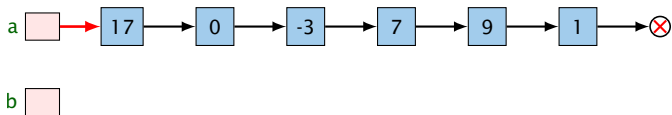
Mergesort – Implementierung

```
1 public static List sort(List a) {
2     if (a == null || a.next == null)
3         return a;
4     List b = a.half(); // Halbiere!
5     a = sort(a);
6     b = sort(b);
7     return merge(a,b);
8 }
```

Mergesort – Implementierung

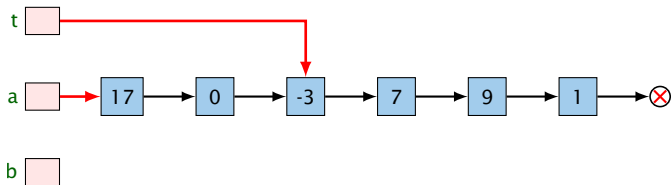
```
1 public List half() {
2     int n = length();
3     List t = this;
4     for (int i = 0; i < n/2-1; i++)
5         t = t.next;
6     List result = t.next;
7     t.next = null;
8     return result;
9 }
```

Halbieren

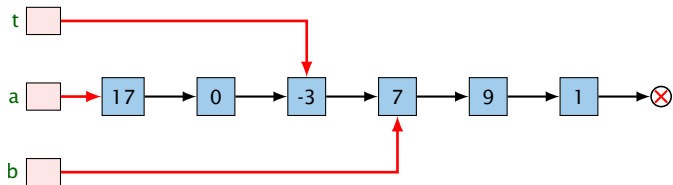


a.half()

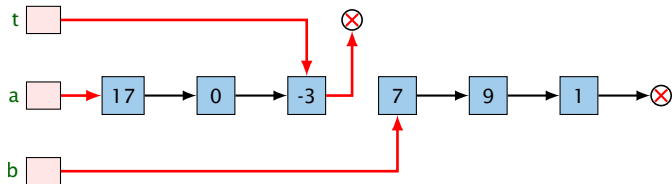
Halbieren



Halbieren



Halbieren



Mergesort – Analyse

- ▶ Sei $V(n)$ die Anzahl der Vergleiche, die Mergesort maximal zum Sortieren einer Liste der Länge n benötigt.
Dann gilt:

$$V(1) = 0$$

$$V(2n) \leq 2 \cdot V(n) + 2 \cdot n$$

- ▶ Für $n = 2^k$, sind das dann nur $k \cdot n = n \log_2 n$ Vergleiche!!!

Achtung:

- ▶ Unsere Funktion `sort()` zerstört ihr Argument!
- ▶ Alle Listenknoten der Eingabe werden weiterverwendet.
- ▶ Die Idee des Sortierens durch Mischen könnte auch mithilfe von Feldern realisiert werden (wie?)
- ▶ Sowohl das Mischen wie das Sortieren könnte man statt rekursiv auch iterativ implementieren (wie?)

11.2 Keller (Stacks)

Operationen:

- `boolean isEmpty()` : testet auf Leerheit;
- `int pop()` : liefert oberstes Element;
- `void push(int x)` : legt `x` oben auf dem Keller ab;
- `String toString()` : liefert eine String-Darstellung

Weiterhin müssen wir einen leeren Keller anlegen können.

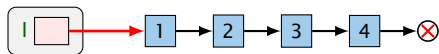
Modellierung Stack

Stack	
+ Stack	()
+ isEmpty	() : boolean
+ push	(x : int) : void
+ pop	() : int
+ toString	() : String

Stack via List

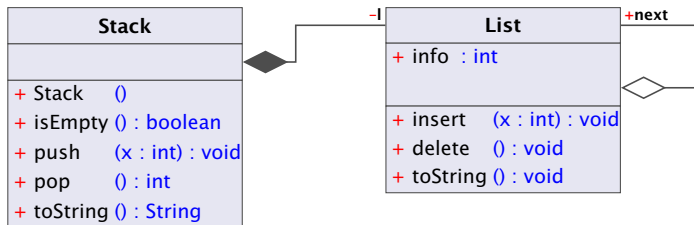
Idee

- ▶ Realisiere **Stack** mithilfe einer Liste:



- ▶ Das Attribut **l** zeigt auf das oberste Kellerelement.

Modellierung Stack via List



Die **gefüllte Raute** bezeichnet eine **Komposition**. Die Liste existiert nur solange wie der Stack (d.h. wird üblicherweise durch diesen erzeugt und zerstört). Außerdem kann die Liste nur Teil eines Stacks sein.

Stack – Implementierung

```
1 public class Stack {
2     private List l;
3     // Konstruktor :
4     public Stack() {
5         l = null;
6     }
7     // Objektmethoden :
8     public boolean isEmpty() {
9         return l == null;
10    }
11    // continued...
```

Stack – Implementierung

```
12     public int pop() {
13         int result = l.info;
14         l = l.next;
15         return result;
16     }
17     public void push(int a) {
18         l = new List(a,l);
19     }
20     public String toString() {
21         return List.toString(l);
22     }
23 } // end of class Stack
```

Bemerkungen

- ▶ Implementierung ist sehr einfach;
- ▶ nutzt gar nicht alle Features von `List`;
- ▶ **Nachteil:** Die Listenelemente sind evt. über den gesamten Speicher verstreut:
⇒ schlechtes Cache-Verhalten!

Zweite Idee:

- ▶ Realisiere Keller mithilfe eines Feldes, und eines Stackpointers, der auf das oberste Element zeigt.
- ▶ Läuft das Feld über ersetzen wir es durch ein größeres.

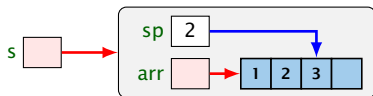
Bemerkungen

- ▶ Implementierung ist sehr einfach;
- ▶ nutzt gar nicht alle Features von `List`;
- ▶ **Nachteil:** Die Listenelemente sind evt. über den gesamten Speicher verstreut:
⇒ schlechtes Cache-Verhalten!

Zweite Idee:

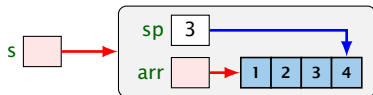
- ▶ Realisiere Keller mithilfe eines Feldes, und eines Stackpointers, der auf das oberste Element zeigt.
- ▶ Lläuft das Feld über ersetzen wir es durch ein größeres.

Stack via Array



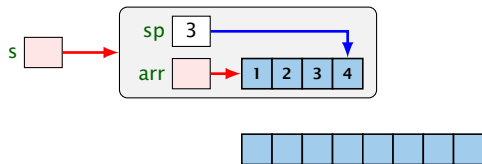
`s.push(4)`

Stack via Array



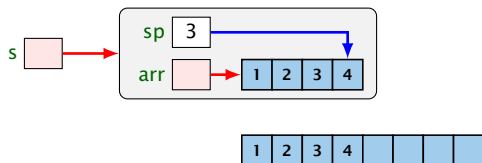
`s.push(5)`

Stack via Array



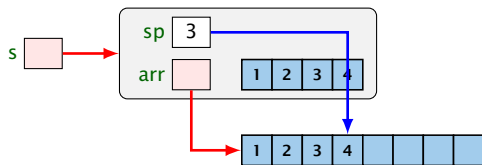
s.push(5)

Stack via Array



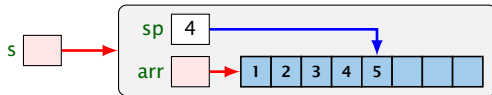
s.push(5)

Stack via Array

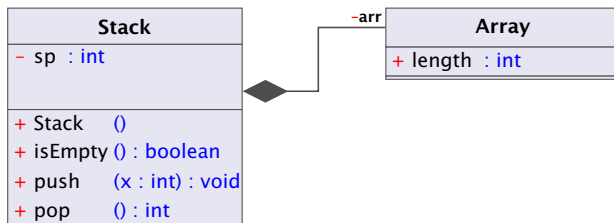


s.push(5)

Stack via Array



Modellierung Stack



Implementierung

```
1 public class Stack {
2     private int sp;
3     private int[] arr;
4     // Konstruktoren:
5     public Stack() {
6         sp = -1;
7         arr = new int[4];
8     }
9     // Objekt-Methoden:
10    public boolean isEmpty() {
11        return sp < 0;
12    }
13    // continued...
```

Implementierung

```
14     public int pop() {
15         return arr[sp--];
16     }
17     public void push(int x) {
18         ++sp;
19         if (sp == arr.length) {
20             int[] b = new int[2*sp];
21             for (int i = 0; i < sp; ++i) b[i] = arr[i];
22             arr = b;
23         }
24         arr[sp] = x;
25     }
26     public toString() {...}
27 } // end of class Stack
```

11.2 Keller (Stacks)

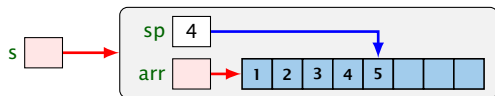
Nachteil:

- ▶ Es wird zwar neuer Platz allokiert, aber nie welcher freigegeben.

Erste Idee:

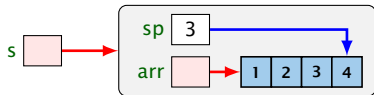
- ▶ Sinkt der Pegel wieder auf die Hälfte, geben wir diese frei. . .

Stack via Array



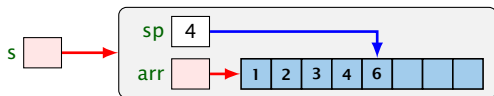
`s.pop()`

Stack via Array



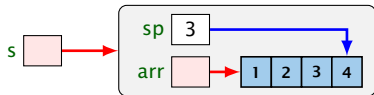
s.push(6)

Stack via Array



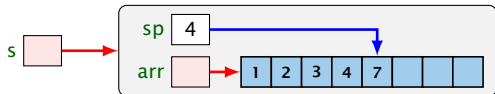
`s.pop()`

Stack via Array



s.push(7)

Stack via Array



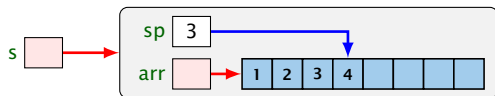
11.2 Keller (Stacks)

- ▶ Im schlimmsten Fall müssen bei **jeder** Operation sämtliche Elemente kopiert werden.

Zweite Idee:

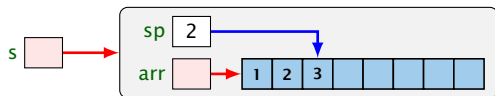
- ▶ Wir geben erst frei, wenn der Pegel auf **ein Viertel** fällt – und dann auch nur die Hälfte!

Stack via Array



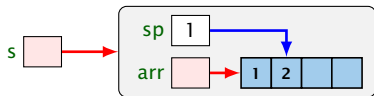
`s.pop()`

Stack via Array



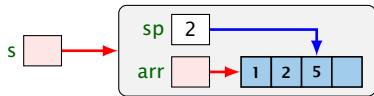
`s.pop()`

Stack via Array



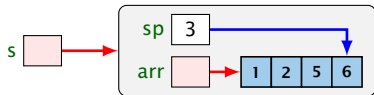
s.push(5)

Stack via Array



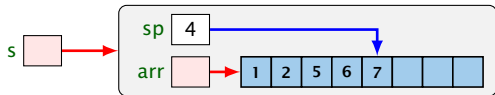
s.push(6)

Stack via Array



s.push(7)

Stack via Array



11.2 Keller (Stacks)

Beobachtung:

- ▶ Vor jedem Kopieren werden mindestens halb so viele Operationen ausgeführt, wie Elemente kopiert werden.
- ▶ Gemittelt über die gesamte Folge der Operationen werden pro Operation maximal zwei Zahlen kopiert (↑amortisierte Aufwandsanalyse)

Implementierung

```
1 public int pop() {
2     int result = arr[sp];
3     if (sp == arr.length/4 && sp >= 2) {
4         int[] b = new int[2*sp];
5         for(int i = 0; i < sp; ++i)
6             b[i] = arr[i];
7         arr = b;
8     }
9     sp--;
10    return result;
11 }
```

11.3 Schlangen (Queues)

(Warte-) Schlangen verwalten ihre Elemente nach dem **FIFO**-Prinzip (**F**irst-**I**n-**F**irst-**O**ut).

Operationen:

`boolean isEmpty()` : testet auf Leerheit;
`int dequeue()` : liefert erstes Element;
`void enqueue(int x)` : reiht `x` in die Schlange ein;
`String toString()` : liefert eine String-Darstellung.

Weiterhin müssen wir eine leere Schlange anlegen können.

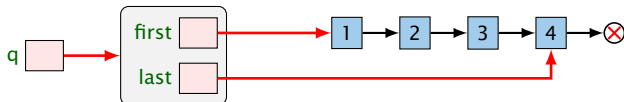
Modellierung Queue

Queue	
+	Queue ()
+	isEmpty () : boolean
+	enqueue (x : int) : void
+	dequeue () : int
+	toString () : String

Queue via List

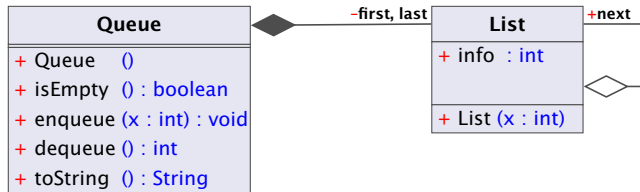
Erste Idee:

- ▶ Realisiere Schlange mithilfe einer Liste:



- ▶ `first` zeigt auf das nächste zu entnehmende Element;
- ▶ `last` zeigt auf das Element hinter dem eingefügt wird;

Modellierung: Queue via List



Objekte der Klasse **Queue** enthalten zwei Verweise auf Objekte der Klasse **List**.

Queue – Implementierung

```
1 public class Queue {
2     private List first, last;
3     // Konstruktor:
4     public Queue() {
5         first = last = null;
6     }
7     // Objekt-Methoden:
8     public boolean isEmpty() {
9         return List.isEmpty(first);
10    }
11    // continued...
```

Queue – Implementierung

```
12     public int dequeue() {
13         int result = first.info;
14         if (last == first) last = null;
15         first = first.next;
16         return result;
17     }
18     public void enqueue(int x) {
19         if (first == null)
20             first = last = new List(x);
21         else {
22             last.insert(x);
23             last = last.next;
24         }
25     }
26     public String toString() {
27         return List.toString(first);
28     }
29 } // end of class Queue
```

Bemerkungen

- ▶ Implementierung ist wieder sehr einfach;
- ▶ nutzt mehr Features von `List`;
- ▶ **Nachteil:** Die Listenelemente sind evt. über den gesamten Speicher verstreut:
⇒ schlechtes Cache-Verhalten!

Zweite Idee:

- ▶ Realisiere Keller mithilfe eines Feldes, und zweier Pointer, die auf erstes bzw. letztes Element zeigen.
- ▶ Läuft das Feld über ersetzen wir es durch ein größeres.

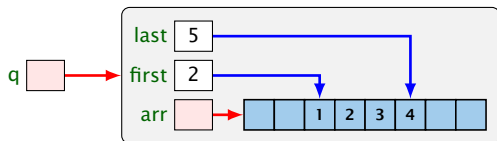
Bemerkungen

- ▶ Implementierung ist wieder sehr einfach;
- ▶ nutzt mehr Features von `List`;
- ▶ **Nachteil:** Die Listenelemente sind evt. über den gesamten Speicher verstreut:
⇒ schlechtes Cache-Verhalten!

Zweite Idee:

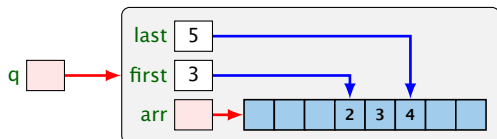
- ▶ Realisiere Keller mithilfe eines Feldes, und zweier Pointer, die auf erstes bzw. letztes Element zeigen.
- ▶ Lläuft das Feld über ersetzen wir es durch ein größeres.

Queue via Array



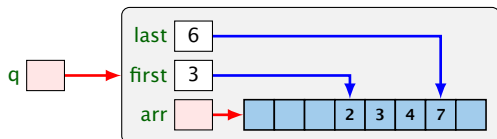
`q.dequeue()`

Queue via Array



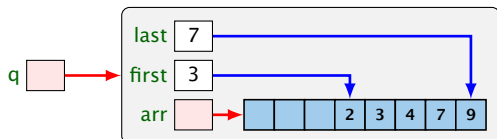
`q.enqueue(7)`

Queue via Array



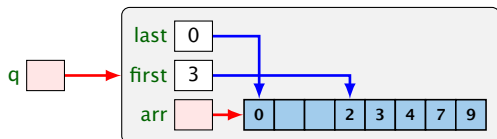
`q.enqueue(9)`

Queue via Array



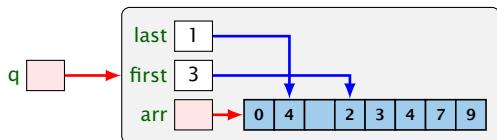
`q.enqueue(0)`

Queue via Array



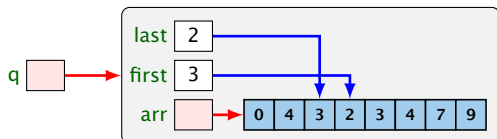
`q.enqueue(4)`

Queue via Array



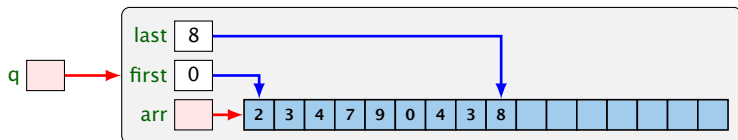
`q.enqueue(3)`

Queue via Array

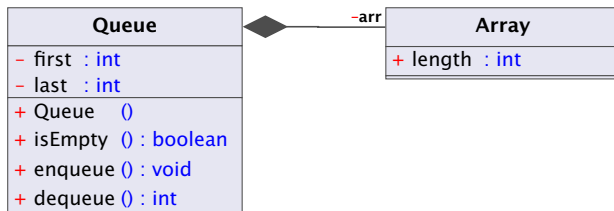


`q.enqueue(8)`

Queue via Array



Modellierung: Queue via Array



Implementierung

```
1 public class Queue {
2     private int first, last;
3     private int[] arr;
4     // Konstruktor:
5     public Queue() {
6         first = last = -1;
7         arr = new int[4];
8     }
9     // Objekt-Methoden:
10    public boolean isEmpty() { return first == -1; }
11    public String toString() {...}
12    //continued...
```

Implementierung von enqueue()

- ▶ Falls die Schlange leer war, muss `first` und `last` auf 0 gesetzt werden.
- ▶ Andernfalls ist das Feld `a` genau dann voll, wenn das Element `x` an der Stelle `first` eingetragen werden sollte.
- ▶ In diesem Fall legen wir ein Feld doppelter Größe an.

Die Elemente `a[first], ..., a[a.length-1]`, `a[0], a[1], ..., a[first-1]` kopieren wir nach `b[0], ..., b[a.length-1]`.

- ▶ Dann setzen wir `first = 0; last = a.length; a = b;`
- ▶ Nun kann `x` an der Stelle `a[last]` abgelegt werden.

Implementierung

```
13     public void enqueue(int x) {
14         if (first == -1) {
15             first = last = 0;
16         } else {
17             int n = arr.length;
18             last = (last + 1) % n;
19             if (last == first) {
20                 int[] b = new int[2*n];
21                 for (int i = 0; i < n; ++i)
22                     b[i] = arr[(first + i) % n];
23                 first = 0;
24                 last = n;
25                 arr = b;
26             }
27             } // end if and else
28         arr[last] = x;
29     }
```

Implementierung von dequeue()

- ▶ Falls nach Entfernen von $a[first]$ die Schlange leer ist, werden $first$ und $last$ auf -1 gesetzt.
- ▶ Andernfalls wird $first$ um 1 (modulo der Länge von arr) inkrementiert.

Für eine evt. Freigabe unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Ist $first < last$, liegen die Schlangen-Elemente an den Stellen $arr[first], \dots, arr[last]$. Sind dies höchstens $n/4$, werden sie an die Stellen $b[0], \dots, b[last-first]$ kopiert.

Implementierung

```
13 public int dequeue() {
14     int result = a[first];
15     if (last == first) {
16         first = last = -1;
17         return result;
18     }
19     int n = arr.length;
20     first = (first+1) % n;
21     int diff = last - first;
22     if (diff > 0 && diff < n/4) {
23         int[] b = new int[n/2];
24         for (int i = first; i <= last; ++i)
25             b[i-first] = a[i];
26         last = last - first;
27         first = 0;
28         arr = b;
29     } else // continued...
```

Implementierung von dequeue()

2. Ist $last < first$, liegen die Schlangen-Elemente an den Stellen $arr[0], \dots, arr[last]$ und $arr[first], \dots, arr[arr.length-1]$.

Sind dies höchstens $n/4$, werden sie an die Stellen $b[0], \dots, b[last]$ sowie $b[first-n/2], \dots, b[n/2-1]$ kopiert.

- ▶ $first$ und $last$ müssen die richtigen neuen Werte erhalten.
- ▶ Dann kann a durch b ersetzt werden.

Implementierung

```
22     if (diff < 0 && diff + n < n/4) {
23         int[] b = new int[n/2];
24         for (int i = 0; i <= last; ++i)
25             b[i] = arr[i];
26         for (int i = first; i < n; ++i)
27             b[i-n/2] = arr[i];
28         first = first-n/2;
29         arr = b;
30     }
31     return result;
32 }
```

11 Abstrakte Datentypen

Zusammenfassung

- ▶ Der Datentyp `List` ist nicht sehr **abstract**, dafür extrem flexibel (gut für **rapid prototyping**)
- ▶ Für die **nützlichen** (eher) abstrakten Datentypen `Stack` und `Queue` lieferten wir zwei Implementierungen. Einer sehr einfache, und eine cache-effiziente.
- ▶ **Achtung:** oft werden bei diesen Datentypen noch weitere Operationen zur Verfügung gestellt.