

1 Vom Problem zum Program

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion $f : E \rightarrow A$, mit $E =$ zulässige Eingaben und $A =$ mögliche Ausgaben.

Beispiele:

Auflösen

Umkehrabb.

Suche x für y , wobei y die Menge aller
Schrittfolgen ist, und x der letzte Zug in Position

1 Vom Problem zum Program

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion $f : E \rightarrow A$, mit $E =$ zulässige Eingaben und $A =$ mögliche Ausgaben.

Beispiele:

1 Vom Problem zum Program

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion $f : E \rightarrow A$, mit $E =$ zulässige Eingaben und $A =$ mögliche Ausgaben.

Beispiele:

- ▶ Addition: $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
- ▶ Primzahltest: $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$
- ▶ Schach: $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}$, wobei \mathcal{P} die Menge aller Schachpositionen ist, und $f(P)$, der beste Zug in Position P .

1 Vom Problem zum Program

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion $f : E \rightarrow A$, mit $E =$ zulässige Eingaben und $A =$ mögliche Ausgaben.

Beispiele:

- ▶ Addition: $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
- ▶ Primzahltest: $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$
- ▶ Schach: $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}$, wobei \mathcal{P} die Menge aller Schachpositionen ist, und $f(P)$, der beste Zug in Position P .

1 Vom Problem zum Program

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion $f : E \rightarrow A$, mit $E =$ zulässige Eingaben und $A =$ mögliche Ausgaben.

Beispiele:

- ▶ Addition: $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
- ▶ Primzahltest: $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$
- ▶ Schach: $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}$, wobei \mathcal{P} die Menge aller Schachpositionen ist, und $f(P)$, der beste Zug in Position P .

Ein **Algorithmus** ist ein **exaktes Verfahren** zur Lösung eines Problems, d.h. zur Bestimmung der gewünschten Resultate.

Man sagt auch ein Algorithmus **berechnet** eine Funktion f .



Ausschnitt aus Briefmarke, Soviet Union 1983
Public Domain [↗](#)

Abu Abdallah
Muhamed ibn Musa
al-Chwarizmi, ca.
780–835

1 Vom Problem zum Program

Ein **Problem** besteht darin, aus einer Menge von Informationen eine weitere (unbekannte) Information zu bestimmen.

mathematisch:

Ein Problem beschreibt eine Funktion $f : E \rightarrow A$, mit $E =$ zulässige Eingaben und $A =$ mögliche Ausgaben.

Beispiele:

- ▶ Addition: $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
- ▶ Primzahltest: $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$
- ▶ Schach: $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}$, wobei \mathcal{P} die Menge aller Schachpositionen ist, und $f(P)$, der beste Zug in Position P .

Algorithmus

Beobachtung:

Nicht jedes Problem läßt sich durch einen Algorithmus lösen (↑**Berechenbarkeitstheorie**).

Beweisidee: (↑Diskrete Strukturen)

- ▶ es gibt überabzählbar unendlich viele Probleme
- ▶ es gibt abzählbar unendlich viele Algorithmen

Algorithmus

Ein **Algorithmus** ist ein **exaktes Verfahren** zur Lösung eines Problems, d.h. zur Bestimmung der gewünschten Resultate.

Man sagt auch ein Algorithmus **berechnet** eine Funktion f .



Ausschnitt aus Briefmarke, Soviet Union 1983
Public Domain [↗](#)

Abu Abdallah
Muhamed ibn Musa
al-Chwarizmi, ca.
780–835

Algorithmus

Beobachtung:

Nicht jedes Problem lässt sich durch einen Algorithmus lösen (↑**Berechenbarkeitstheorie**).

Beweisidee: (↑**Diskrete Strukturen**)

- ▶ es gibt **überabzählbar unendlich** viele Probleme
- ▶ es gibt **abzählbar unendlich** viele Algorithmen

Algorithmus

Ein **Algorithmus** ist ein **exaktes Verfahren** zur Lösung eines Problems, d.h. zur Bestimmung der gewünschten Resultate.

Man sagt auch ein Algorithmus **berechnet** eine Funktion f .



Ausschnitt aus Briefmarke, Soviet Union 1983
Public Domain [↗](#)

Abu Abdallah
Muhamed ibn Musa
al-Chwarizmi, ca.
780–835

Algorithmus

Das **exakte Verfahren** besteht i.a. darin, eine Abfolge von **elementaren Einzelschritten** der Verarbeitung festzulegen.

Beispiel: Alltagsalgorithmen

<i>Resultat</i>	<i>Algorithmus</i>	<i>Einzelschritte</i>
Pullover	Strickmuster	eine links, eine rechts, eine fallen lassen
Kuchen	Rezept	nimm 3 Eier ...
Konzert	Partitur	Noten

Algorithmus

Beobachtung:

Nicht jedes Problem läßt sich durch einen Algorithmus lösen (↑**Berechenbarkeitstheorie**).

Beweisidee: (↑**Diskrete Strukturen**)

- ▶ es gibt **überabzählbar unendlich** viele Probleme
- ▶ es gibt **abzählbar unendlich** viele Algorithmen

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Problem: geg. $a, b \in \mathbb{N}, a, b \neq 0$. Bestimme $\text{ggT}(a, b)$.

Algorithmus:

1. Falls $a = b$ brich Berechnung ab. Es gilt $\text{ggT}(a, b) = a$.
Ansonsten gehe zu Schritt 2.
2. Falls $a > b$, ersetze a durch $a - b$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort. Ansonsten gehe zu Schritt 3.
3. Es gilt $a < b$. Ersetze b durch $b - a$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort.

Algorithmus

Das **exakte Verfahren** besteht i.a. darin, eine Abfolge von **elementaren Einzelschritten** der Verarbeitung festzulegen.

Beispiel: Alltagsalgorithmen

<i>Resultat</i>	<i>Algorithmus</i>	<i>Einzelschritte</i>
Pullover	Strickmuster	eine links, eine rechts, eine fallen lassen
Kuchen	Rezept	nimm 3 Eier ...
Konzert	Partitur	Noten

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Warum geht das?

Wir zeigen, für $a > b$: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$.

Seien $g = \text{ggT}(a, b)$, $g' = \text{ggT}(a - b, b)$.

Dann gilt:

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Problem: geg. $a, b \in \mathbb{N}, a, b \neq 0$. Bestimme $\text{ggT}(a, b)$.

Algorithmus:

1. Falls $a = b$ brich Berechnung ab. Es gilt $\text{ggT}(a, b) = a$.
Ansonsten gehe zu Schritt 2.
2. Falls $a > b$, ersetze a durch $a - b$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort. Ansonsten gehe zu Schritt 3.
3. Es gilt $a < b$. Ersetze b durch $b - a$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort.

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Warum geht das?

Wir zeigen, für $a > b$: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$.

Seien $g = \text{ggT}(a, b)$, $g' = \text{ggT}(a - b, b)$.

Dann gilt:

$$\begin{array}{lcl} a & = & q_a \cdot g \\ b & = & q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lcl} a - b & = & q'_{a-b} \cdot g' \\ b & = & q'_b \cdot g' \end{array}$$

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Problem: geg. $a, b \in \mathbb{N}, a, b \neq 0$. Bestimme $\text{ggT}(a, b)$.

Algorithmus:

1. Falls $a = b$ brich Berechnung ab. Es gilt $\text{ggT}(a, b) = a$. Ansonsten gehe zu Schritt 2.
2. Falls $a > b$, ersetze a durch $a - b$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort. Ansonsten gehe zu Schritt 3.
3. Es gilt $a < b$. Ersetze b durch $b - a$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort.

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Warum geht das?

Wir zeigen, für $a > b$: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$.

Seien $g = \text{ggT}(a, b)$, $g' = \text{ggT}(a - b, b)$.

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} a = q_a \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a - b = q'_{a-b} \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - b = (q_a - q_b) \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a = (q'_{a-b} + q'_b) \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Problem: geg. $a, b \in \mathbb{N}, a, b \neq 0$. Bestimme $\text{ggT}(a, b)$.

Algorithmus:

1. Falls $a = b$ brich Berechnung ab. Es gilt $\text{ggT}(a, b) = a$. Ansonsten gehe zu Schritt 2.
2. Falls $a > b$, ersetze a durch $a - b$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort. Ansonsten gehe zu Schritt 3.
3. Es gilt $a < b$. Ersetze b durch $b - a$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort.

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Warum geht das?

Wir zeigen, für $a > b$: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$.

Seien $g = \text{ggT}(a, b)$, $g' = \text{ggT}(a - b, b)$.

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} a = q_a \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a - b = q'_{a-b} \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - b = (q_a - q_b) \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a = (q'_{a-b} + q'_b) \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

Das heißt g ist Teiler von $a - b, b$ und g' ist Teiler von a, b .

Daraus folgt $g \leq g'$ und $g' \leq g$, also $g = g'$.

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Problem: geg. $a, b \in \mathbb{N}, a, b \neq 0$. Bestimme $\text{ggT}(a, b)$.

Algorithmus:

1. Falls $a = b$ brich Berechnung ab. Es gilt $\text{ggT}(a, b) = a$. Ansonsten gehe zu Schritt 2.
2. Falls $a > b$, ersetze a durch $a - b$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort. Ansonsten gehe zu Schritt 3.
3. Es gilt $a < b$. Ersetze b durch $b - a$ und setze Berechnung in Schritt 1 fort.

Eigenschaften

(statische) Finitheit. Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

(dynamische) Finitheit. Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

Terminiertheit. Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme, reaktive Systeme**)

Determiniertheit. Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen, nicht-deterministische Algorithmen**)

Determinismus. Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen, nicht-deterministische Algorithmen**)

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Warum geht das?

Wir zeigen, für $a > b$: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$.

Seien $g = \text{ggT}(a, b)$, $g' = \text{ggT}(a - b, b)$.

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} a = q_a \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a - b = q'_{a-b} \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - b = (q_a - q_b) \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a = (q'_{a-b} + q'_b) \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

Das heißt g ist Teiler von $a - b, b$ und g' ist Teiler von a, b .

Daraus folgt $g \leq g'$ und $g' \leq g$, also $g = g'$.

Eigenschaften

(statische) Finitheit. Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

(dynamische) Finitheit. Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

Terminiertheit. Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme, reaktive Systeme**)

Determiniertheit. Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen, nicht-deterministische Algorithmen**)

Determinismus. Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen, nicht-deterministische Algorithmen**)

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Warum geht das?

Wir zeigen, für $a > b$: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$.

Seien $g = \text{ggT}(a, b)$, $g' = \text{ggT}(a - b, b)$.

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} a = q_a \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a - b = q'_{a-b} \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - b = (q_a - q_b) \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a = (q'_{a-b} + q'_b) \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

Das heißt g ist Teiler von $a - b, b$ und g' ist Teiler von a, b .

Daraus folgt $g \leq g'$ und $g' \leq g$, also $g = g'$.

Eigenschaften

(statische) Finitheit. Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

(dynamische) Finitheit. Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

Terminiertheit. Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme**, ↑**reaktive Systeme**)

Determiniertheit. Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

Determinismus. Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Warum geht das?

Wir zeigen, für $a > b$: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$.

Seien $g = \text{ggT}(a, b)$, $g' = \text{ggT}(a - b, b)$.

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} a = q_a \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a - b = q'_{a-b} \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - b = (q_a - q_b) \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a = (q'_{a-b} + q'_b) \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

Das heißt g ist Teiler von $a - b, b$ und g' ist Teiler von a, b .

Daraus folgt $g \leq g'$ und $g' \leq g$, also $g = g'$.

Eigenschaften

(statische) Finitheit. Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

(dynamische) Finitheit. Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

Terminiertheit. Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme**, ↑**reaktive Systeme**)

Determiniertheit. Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

Determinismus. Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Warum geht das?

Wir zeigen, für $a > b$: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$.

Seien $g = \text{ggT}(a, b)$, $g' = \text{ggT}(a - b, b)$.

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} a = q_a \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a - b = q'_{a-b} \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - b = (q_a - q_b) \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a = (q'_{a-b} + q'_b) \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

Das heißt g ist Teiler von $a - b, b$ und g' ist Teiler von a, b .

Daraus folgt $g \leq g'$ und $g' \leq g$, also $g = g'$.

Eigenschaften

(statische) Finitheit. Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

(dynamische) Finitheit. Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

Terminiertheit. Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme**, ↑**reaktive Systeme**)

Determiniertheit. Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

Determinismus. Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

Beispiel: Euklidischer Algorithmus

Warum geht das?

Wir zeigen, für $a > b$: $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$.

Seien $g = \text{ggT}(a, b)$, $g' = \text{ggT}(a - b, b)$.

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} a = q_a \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a - b = q'_{a-b} \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - b = (q_a - q_b) \cdot g \\ b = q_b \cdot g \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} a = (q'_{a-b} + q'_b) \cdot g' \\ b = q'_b \cdot g' \end{array}$$

Das heißt g ist Teiler von $a - b, b$ und g' ist Teiler von a, b .

Daraus folgt $g \leq g'$ und $g' \leq g$, also $g = g'$.

Programm

Ein **Programm** ist die **Formulierung** eines Algorithmus in einer **Programmiersprache**.

Die Formulierung gestattet (hoffentlich) eine maschinelle Ausführung.

- ▶ Ein **Programmsystem** berechnet i.a. nicht nur eine Funktion, sondern **immer wieder** Funktionen in Interaktion mit Benutzerinnen und/oder der Umgebung.
- ▶ Es gibt viele Programmiersprachen: **Java**, **C**, **Prolog**, **Fortran**, **TeX**, **PostScript**, ...

Eigenschaften

(statische) Finitheit. Die Beschreibung des Algorithmus besitzt endliche Länge. (↑**nichtuniforme Algorithmen**)

(dynamische) Finitheit. Die bei Abarbeitung entstehenden Zwischenergebnisse sind endlich.

Terminiertheit. Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten ein Resultat liefern, heißen **terminierend**. (↑**Betriebssysteme**, ↑**reaktive Systeme**)

Determiniertheit. Bei gleichen Eingabedaten gibt ein Algorithmus das gleiche Ergebnis aus. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

Determinismus. Der nächste anzuwendende Schritt im Verfahren ist stets eindeutig definiert. (↑**randomisierte Algorithmen**, ↑**nicht-deterministische Algorithmen**)

Programm

Ein Programm ist **gut**, wenn

- ▶ **die Programmiererin** in ihr algorithmische Ideen **natürlich** beschreiben kann, insbesondere später noch versteht was das Programm tut (oder nicht tut);
- ▶ **ein Computer** das Programm leicht verstehen und **effizient** ausführen kann.

Programm

Ein **Programm** ist die **Formulierung** eines Algorithmus in einer **Programmiersprache**.

Die Formulierung gestattet (hoffentlich) eine maschinelle Ausführung.

- ▶ Ein **Programmsystem** berechnet i.a. nicht nur eine Funktion, sondern **immer wieder** Funktionen in Interaktion mit Benutzerinnen und/oder der Umgebung.
- ▶ Es gibt viele Programmiersprachen: **Java**, **C**, **Prolog**, **Fortran**, **TeX**, **PostScript**, ...