

# Approximation unabhängiger Mengen mit der $\vartheta$ -Funktion

Matthias Baumgart  
matthias.baumgart@informatik.tu-chemnitz.de

Chemnitz, 16. Juni 2004

# Gliederung

1. Einleitung
2. Die Lovász  $\vartheta$ -Zahl
3. Der Algorithmus von Alon und Kahale
4. Zusammenfassung

## Einleitung

Karger, Motwani und Sudan veröffentlichten einen Färbungsalgorithmus, der einen sogenannten vektor- $k$ -färbbaren Graphen mit  $\tilde{O}(n^{1-3(k-1)})$  Farben färbt.

## Einleitung

Karger, Motwani und Sudan veröffentlichten einen Färbungsalgorithmus, der einen sogenannten vektor- $k$ -färbbaren Graphen mit  $\tilde{O}(n^{1-3(k-1)})$  Farben färbt.

Idee ist nun:

Wenn wir einen Graphen mit  $\tilde{O}(n^{1-3(k-1)})$  Farben färben, dann enthält die größte Farbklasse mindestens  $\tilde{\Omega}(n^{3/(k+1)})$  Knoten.

Voraussetzung: Graph ist vektor- $k$ -färbbar.

Eingabegraph erfüllt

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{k} + m \quad k \geq 3 ,$$

Eingabegraph erfüllt

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{k} + m \quad k \geq 3 ,$$

dann gibt es  $m$  Knoten die vektor- $k$ -färbbar sind.

In diesem Fall kann eine unabhängige Menge der Größe

$$\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$$

gefunden werden.

Eingabegraph erfüllt

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{k} + m \quad k \geq 3 ,$$

dann gibt es  $m$  Knoten die vektor- $k$ -färbbar sind.

In diesem Fall kann eine unabhängige Menge der Größe

$$\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$$

gefunden werden.

Ergebnis von Boppana und Halldórsson bestimmt unabhängige Menge der Größe

$$\Omega(m^{1/(k-1)}) .$$

## Die Lovász $\vartheta$ -Zahl

**Definition 1** *Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine Zuweisung eines Einheitsvektors  $a_v \in \mathbb{R}^k$  für jeden Knoten  $v \in V$  heißt orthonormale Repräsentation von  $G$ , falls für alle  $\{v, w\} \notin E$  die Vektoren  $a_v$  und  $a_w$  orthogonal zueinander sind, das heißt es gilt  $a_v^T a_w = 0$ .*

## Die Lovász $\vartheta$ -Zahl

**Definition 1** *Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine Zuweisung eines Einheitsvektors  $a_v \in \mathbb{R}^k$  für jeden Knoten  $v \in V$  heißt orthonormale Repräsentation von  $G$ , falls für alle  $\{v, w\} \notin E$  die Vektoren  $a_v$  und  $a_w$  orthogonal zueinander sind, das heißt es gilt  $a_v^T a_w = 0$ .*

**Definition 2** *Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann ist die Lovász  $\vartheta(G)$ -Zahl des Graphen  $G$  das Minimum über alle Einheitsvektoren  $d$  und alle orthonormalen Repräsentationen  $(a_v)$  von  $G$  von*

$$\max_{v \in V} \frac{1}{(d^T a_v)^2}.$$

Es gilt stets

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(\overline{G})$$

beziehungsweise

$$\omega(G) \leq \vartheta(\overline{G}) \leq \chi(G) .$$

Es gilt stets

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(\overline{G})$$

beziehungsweise

$$\omega(G) \leq \vartheta(\overline{G}) \leq \chi(G) .$$

**Fakt 3** Die Lovász  $\vartheta(G)$ -Zahl eines Graphen  $G = (V, E)$  hat folgende äquivalente Beschreibungen:

1. Es sei  $(b_v)$  eine orthonormale Repräsentation des Graphen  $\overline{G}$  und  $d$  ein Einheitsvektor. Dann gilt

$$\vartheta(G) = \max_{\{d, (b_v)\}} \sum_{i=1}^n (d^T b_i)^2 .$$

2. Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann gilt für die Lovász  $\vartheta(G)$ -Zahl

$$\vartheta(G) = \max_B \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} ,$$

wobei  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische positiv semidefinite Matrix ist für die gilt

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} = 1$$

und

$$b_{ij} = 0$$

für alle Kanten  $\{i, j\} \in E$  des Graphen  $G$ .

**Satz 4** *Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann gilt*

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) .$$

**Satz 4** *Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann gilt*

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) .$$

**Beweis:**

- sei  $I$  eine beliebige maximale unabhängige Menge in  $G$
- setze  $b_v := e$  für alle Knoten  $v \in I$
- konstruiere Einheitsvektor  $f$  mit  $e^T f = 0$
- setze  $b_v := f$  für alle Knoten  $v \in V \setminus I$
- $(b_v)$  ist orthonormale Repräsentation von  $\overline{G}$

Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha(G) &= |I| \\ &= \underbrace{\sum_{v \in I} (e^T e)^2}_{=|I|} + \underbrace{\sum_{v \notin I} (e^T f)^2}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^n (e^T b_v)^2 \\ &\leq \max_{\{e, (b_v)\}} \sum_{i=1}^n (e^T b_i)^2 \\ &= \vartheta(G) .\end{aligned}$$

□

## Der Algorithmus von Alon und Kahale

Der Algorithmus von Alon und Kahale beruht auf einem Färbungsalgorithmus von Karger, Motwani und Sudan.

## Der Algorithmus von Alon und Kahale

Der Algorithmus von Alon und Kahale beruht auf einem Färbungsalgorithmus von Karger, Motwani und Sudan.

**Definition 5** *Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Die vektorchromatische Zahl  $\chi_v(G)$  des Graphen  $G$  ist die kleinste reelle Zahl  $h$ , so dass es eine Belegung der Knoten  $v \in V$  mit Einheitsvektoren  $a_v$  gibt, so dass für jede Kante  $\{v, w\} \in E$  gilt*

$$a_v^T a_w \leq -\frac{1}{h-1}.$$

Die kleinste reelle Zahl  $h$ , so dass es eine Belegung der Knoten  $v \in V$  mit Einheitsvektoren  $a_v$  gibt, so dass für jede Kante  $\{v, w\} \in E$  gilt

$$a_v^T a_w = -\frac{1}{h-1}$$

nennen wir strenge vektorchromatische Zahl  $\chi_{sv}(G)$  des Graphen  $G$

Die kleinste reelle Zahl  $h$ , so dass es eine Belegung der Knoten  $v \in V$  mit Einheitsvektoren  $a_v$  gibt, so dass für jede Kante  $\{v, w\} \in E$  gilt

$$a_v^T a_w = -\frac{1}{h-1}$$

nennen wir strenge vektorchromatische Zahl  $\chi_{sv}(G)$  des Graphen  $G$

**Fakt 6** Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Gilt für die vektorchromatische Zahl  $\chi_v(G) \leq h$ , wobei  $h$  eine feste ganze Zahl mit  $h \geq 3$  ist, dann kann  $G$  von einem randomisierten Polynomialzeitalgorithmus mit  $\tilde{O}(n^{1-3/(h+1)})$  Farben gefärbt werden.

**Fakt 7** Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Die strenge vektorchromatische Zahl des Graphen  $G$  ist gleich der Lovász  $\vartheta(\overline{G})$ -Zahl.

**Satz 8** *Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Falls  $\vartheta(G) \geq n/k + m$  gilt, wobei  $k$  eine feste ganze Zahl mit  $k \geq 3$  ist, kann eine unabhängige Menge der Größe  $\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$  von einem randomisierten Polynomialzeitalgorithmus gefunden werden.*

**Satz 8** *Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Falls  $\vartheta(G) \geq n/k + m$  gilt, wobei  $k$  eine feste ganze Zahl mit  $k \geq 3$  ist, kann eine unabhängige Menge der Größe  $\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$  von einem randomisierten Polynomzeitalgorithmus gefunden werden.*

**Beweis:**

- sei  $d$  ein Einheitsvektor und  $(b_v)$  eine orthonormale Repräsentation von  $\overline{G}$  mit

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^n (d^T b_i)^2$$

- sortiere Knoten, so dass gilt

$$(d^T b_1)^2 \geq (d^T b_2)^2 \geq \dots \geq (d^T b_n)^2$$

- wegen

$$(d^T b_1)^2 + (d^T b_2)^2 + \dots + (d^T b_n)^2 \geq \frac{n}{k} + m \quad \text{und} \quad (d^T b_v)^2 \leq 1$$

gilt

$$(d^T b_m)^2 \geq \frac{1}{k}$$

- wegen

$$(d^T b_1)^2 + (d^T b_2)^2 + \dots + (d^T b_n)^2 \geq \frac{n}{k} + m \quad \text{und} \quad (d^T b_v)^2 \leq 1$$

gilt

$$(d^T b_m)^2 \geq \frac{1}{k}$$

- betrachte nun nur noch die ersten  $m$  Knoten  $V' = \{1, \dots, m\}$
- es sei  $K$  der auf  $V'$  induzierte Untergraph von  $G$
- die Vektoren  $(b_{v'})$  mit  $v' \in V'$  bilden eine orthonormale Repräsentation des Graphen  $\overline{K}$

- es gilt

$$\max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq k$$

und damit

$$\vartheta(\overline{K}) = \min_{\{d, (b_{v'})\}} \max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq \max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq k$$

- es gilt

$$\max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq k$$

und damit

$$\vartheta(\overline{K}) = \min_{\{d, (b_{v'})\}} \max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq \max_{v' \in V'} \frac{1}{(d^T b_{v'})^2} \leq k$$

- folglich gilt außerdem

$$\chi_v(K) \leq \chi_{sv}(K) = \vartheta(\overline{K}) \leq k$$

- demnach kann  $K$  mit  $\tilde{O}(m^{1-3/(k+1)})$  Farben gefärbt werden und die größte Farbenklasse bildet eine unabhängige Menge der Größe  $\tilde{\Omega}(m^{3/(k+1)})$

Wie findet man nun einen Einheitsvektor  $d$  und eine orthonormale Repräsentation  $(b_v)$  des Graphen  $\overline{G}$  mit

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^n (d^T b_i)^2 ?$$

Wie findet man nun einen Einheitsvektor  $d$  und eine orthonormale Repräsentation  $(b_v)$  des Graphen  $\overline{G}$  mit

$$\vartheta(G) = \sum_{i=1}^n (d^T b_i)^2 ?$$

Es reicht sogar, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^n (d^T b_i)^2 \geq \vartheta(G) - 1 .$$

Für die Lovász  $\vartheta(G)$ -Zahl des Graphen  $G = (V, E)$  gilt

$$\vartheta(G) = \max_B \text{Tr} (BJ) ,$$

wobei  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische positiv semidefinite Matrix ist, so dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{Tr} B = 1$$

$$b_{ij} = 0 \quad \text{für alle Kanten } \{i, j\} \in E.$$

Für die Lovász  $\vartheta(G)$ -Zahl des Graphen  $G = (V, E)$  gilt

$$\vartheta(G) = \max_B \text{Tr} (BJ) ,$$

wobei  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische positiv semidefinite Matrix ist, so dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{Tr} B = 1$$

$$b_{ij} = 0 \quad \text{für alle Kanten } \{i, j\} \in E.$$

Eine Matrix  $B$  mit  $\text{Tr} (BJ) \geq \vartheta - 1$  kann in Polynomialzeit mit der Ellipsoidmethode oder mit Innere-Punkte-Verfahren gefunden werden.

Da  $B$  symmetrisch positiv semidefinit ist, gibt es eine Matrix  $C$  mit

$$B = CC^T .$$

Die Matrix  $C$  kann mit der Cholesky Zerlegung bestimmt werden.

Insbesondere gilt

$$b_{ij} = c_i^T c_j .$$

Da  $B$  symmetrisch positiv semidefinit ist, gibt es eine Matrix  $C$  mit

$$B = CC^T .$$

Die Matrix  $C$  kann mit der Cholesky Zerlegung bestimmt werden.

Insbesondere gilt

$$b_{ij} = c_i^T c_j .$$

Setze

$$b_i = \frac{c_i}{\|c_i\|}$$

und

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{\left\| \sum_{i=1}^n c_i \right\|} .$$

$(b_v)$  ist eine orthonormale Repräsentation des Graphen  $\overline{G}$ .

Es gilt

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1 \quad \text{und} \quad \left( \sum_{i=1}^n c_i \right)^2 \geq \vartheta(G) - 1.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1 \quad \text{und} \quad \left( \sum_{i=1}^n c_i \right)^2 \geq \vartheta(G) - 1 .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (d^T b_i)^2 &\geq \left( \sum_{i=1}^n c_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n (d^T b_i)^2 \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n \|c_i\| \cdot (d^T b_i) \right)^2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^n d^T c_i \right)^2 = \left( d^T \left( \sum_{i=1}^n c_i \right) \right)^2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^n c_i \right)^2 \geq \vartheta(G) - 1 . \end{aligned}$$

□

## Zusammenfassung

Gegeben ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $\alpha(G) \geq n/k + m$  und  $k \geq 3$ .

## Zusammenfassung

Gegeben ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $\alpha(G) \geq n/k + m$  und  $k \geq 3$ .

1. berechne orthonormale Repräsentation des Graphen  $\bar{G}$   
(mittels Theta-Funktion)
2. sortiere Knoten absteigend entsprechend der Werte  $(d^T b_i)^2$  mit  $i \in V$
3. wende Algorithmus von Karger et.al. auf den induzierten Untergraphen der ersten  $m$  Knoten an
4. gib größte Farbklasse aus

