Technische Universität München
Institut für Informatik

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen
WS 1997/98
Kapitel 0

Stand: 10. März 1998

Dozent:

Prof. Dr. Ernst W. Mayr

Mitschrift:

Martin Stumpf
Thomas Schöpf
Martin Hans
Guido Wimmel

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung und Auffrischung

0.1 Was sind „kombinatorische" Algorithmen?

Probleme, die, könnten wir alle Fälle aufzählen, trivial wären, aber eine sehr große Anzahl von Fällen haben.
Beispiel: Hamiltonscher Kreis (NP-vollständig), Eulerscher Kreis (P)

0.2 Maschinenmodelle

- Turingmaschine (TM)
- Random Access Machine (RAM)
- Schaltkreise
- (Quantencomputer)
- (DNA-Computer)

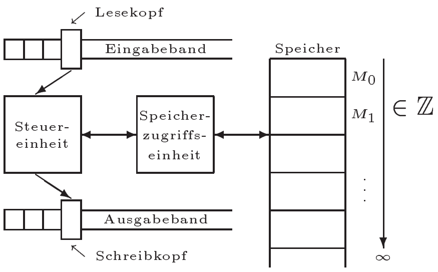

Abb. 1: **Random Access Machine**

0.3 Komplexitätsmaße

Terminologie:
Problem $\equiv$ Sprache $= \{x \in \Sigma^*,\ x$ hat eine bestimmte Eigenschaft$\}$
Maschine $M \left\{ \begin{array}{l} \text{entscheidet/erkennt} \\ \text{akzeptiert} \end{array} \right\}$ eine (formale) Sprache $L \subseteq \Sigma^*$

0.3.1 Berechnungsmodi

a) erkennt: $(\forall x \in \Sigma^*)$ [M hält auf Eingabe x und gibt die richtige Antwort]

b) akzeptiert: $(\forall x \in L)$ [M hält auf x und akzeptiert] und $(\forall x \in \overline{L})$ [M hält auf x und weist zurück oder M hält nicht]

0.3.2 Probleme und Funktionen

- Probleme sind Teilmengen $\subseteq \Sigma^*$
- Berechnung von Funktionen:

Definition: Seien Σ, Γ Alphabete. Eine TM (bzw. RAM) M berechnet eine (partielle) Funktion $\mathrm{f} : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gdw. $(\forall x \in \Sigma^*)$ [falls M mit Eingabe x hält, dann ist die Ausgabe von M gleich $\mathrm{f}(x) \equiv x \in$ Definitionsbereich von f]

0.3.3 Ressourcen

- welche Kosten: Zeit, Platz (Speicher), Schaltkreisgröße, Schaltkreistiefe, Programmgröße
- wie werden die Kosten berechnet: Betrachte Eingaben x der Länge n
  - worst-case Komplexität:
    $$\mathrm{C}(n) := \max\{\text{Komplexität}(x);\ |x| = n\}$$
  - durchschnittliche Komplexität (average complexity):
    $$\mathrm{C}(n) := \frac{1}{|\Sigma^n|} \sum_{|x|=n} \text{Komplexität}(x)$$
    allgemeiner: Wahrscheinlichkeitsmaß μ
    $$\mathrm{C}(n) := \sum_{x \in \Sigma^n} \mu(x) \cdot \text{Komplexität}(x)$$
  - amortisierte Komplexität:
    durchschnittliche Kosten der Operationen in Folgen
    worst-case über alle Folgen
  - probabilistische oder randomisierte Komplexität:
    Algorithmus hat Zufallsbits zur Verfügung. Erwartete Laufzeit (über alle Realisierungen (mit Wahrscheinlichkeit) der Zufallsbits) für feste Eingabe x, dann worst-case für alle $|x| = n$.
- Kosteneinheiten:
  - uniformes Kostenmodell
  - logarithmisches Kostenmodell: Kosten $\approx$ Länge der Operanden

Beispiel: $\mathrm{f}(n) := 2^{2^n}$ (1 Schritt pro Quadrierung $\Rightarrow$ n Schritte)

0.3.4 Wachstumsverhalten von Funktionen

Groß-$\mathcal{O}$-Notation (Bachmann/Landau)
$\mathrm{f}(n) = 3n^2 + n$ (Asymptotische Komplexität)
$\mathrm{f}_2(n) = 5n^2 - 3n$

Definition: f, g seien Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$

- $\mathrm{g}(n)$ ist $\mathcal{O}(\mathrm{f}(n))$ [auch: g ist $\mathcal{O}(\mathrm{f})$, $\mathrm{g}(n) = \mathcal{O}(\mathrm{f}(n))$, $\mathrm{g}(n) \in \mathcal{O}(\mathrm{f}(n))$] gdw. $(\exists C \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N})[(\forall n \geq n_0)[|\mathrm{g}(n)| \leq C \cdot |\mathrm{f}(n)|]]$
  n^3 ist <u>nicht</u> $\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$
- $\mathrm{g}(n)$ ist $\Omega(\mathrm{f}(n))$ [...] gdw. $(\exists C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N})[(\forall n \geq n_0)[|\mathrm{g}(n)| \geq C \cdot |\mathrm{f}(n)|]]$
- $\mathrm{g}(n)$ ist $\Theta(\mathrm{f}(n))$ gdw. g ist $\mathcal{O}(\mathrm{f})$ und g ist $\Omega(\mathrm{f})$
- $\mathrm{g}(n)$ ist $o(\mathrm{f}(n))$ gdw. $(\forall C > 0\ \exists n_0)[(\forall n \geq n_0)[|\mathrm{g}(n)| \leq C \cdot |\mathrm{f}(n)|]]$
- $\mathrm{g}(n)$ ist $\omega(\mathrm{f}(n))$ gdw. $(\forall C > 0\ \exists n_0)[(\forall n \geq n_0)[|\mathrm{g}(n) \geq C \cdot |\mathrm{f}(n)|]]$
- $\mathrm{g}(n)$ ist $\Omega_\infty(\mathrm{f}(n))$ gdw. $(\exists C > 0)[|\mathrm{g}(n)| \geq C \cdot |\mathrm{f}(n)|$ für unendlich viele $n]$
  Beispiel: $n^2 \sin \frac{\pi}{2} n = \Omega_\infty(n)$
- $\mathrm{g}(n)$ ist $\omega_\infty(\mathrm{f}(n))$ gdw. $(\forall C > 0)[|\mathrm{g}(n)| \geq C \cdot |\mathrm{f}(n)|]$ für unendlich viele $n]$

0.3.5 Rekursionsformeln

Mergesort:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(n) &= 2\mathrm{T}\left(\frac{n}{2}\right) + cn \\
&= cn + 2\mathrm{T}\left(\frac{n}{2}\right) \\
&= cn + 2\left(c\frac{n}{2} + 2\mathrm{T}\left(\frac{n}{4}\right)\right) \\
&= cn + cn + 4\mathrm{T}\left(\frac{n}{4}\right) \\
&\approx cn\log_2 n \text{ (nur genau für Zweierpotenzen, sonst} \pm 1)
\end{aligned}$$

Allgemein: $\mathrm{C}(n) = \mathrm{F}_1(\mathrm{C}(n^{(1)}), \mathrm{C}(n^{(2)}), \ldots, \mathrm{C}(n^{(r)})) + \mathrm{F}_2(n)$

0.3.5.1 Multiplikatoren

$\mathrm{f}_n = 2\mathrm{f}_{n-1} + n,\ n \geq 2;\ \mathrm{f}_1 = 1$

$$\left.\begin{array}{rll}
\mathrm{f}_n &= 2\mathrm{f}_{n-1} + n & \mid \cdot 1 \\
\mathrm{f}_{n-1} &= 2\mathrm{f}_{n-2} + n - 1 & \mid \cdot 2 \\
\vdots & & \vdots \\
\mathrm{f}_2 &= 2\mathrm{f}_1 + 2 & \mid \cdot 2^{n-2} \\
\mathrm{f}_1 &= 1 & \mid \cdot 2^{n-1}
\end{array}\right\} \mathrm{f}_n = 2^{n-1}\mathrm{f}_1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i(n-i) = 2^{n+1} - n - 2$$

Addieren aller Gleichungen:

$$\mathrm{f}_n = 2^{n-1}\mathrm{f}_1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i(n-i) = \underbrace{2^{n-1}}_{(1)} + \underbrace{n\sum_{i=0}^{n-2} 2^i}_{(2)} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} i2^i}_{(3)}$$

(2) (Geometrische Reihe): $n\sum_{i=0}^{n-2} 2^i = n(2^{n-1} - 1)$

(3) (Substitution: $n - 2 = k$ und $2 = x$):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} ix^i &= \sum_{i=1}^{k} ix^i \text{(erster Summand ist 0)} \\
&= x\sum_{i=1}^{k} ix^{i-1} \\
&= x\sum_{i=1}^{k} \frac{dx^i}{dx} \\
&= x\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{k} x^i \\
&= x\frac{d}{dx}\frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} \\
&= \frac{kx^{k+2} - x^{k+1}(k+1) + x}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen von $k = n-2$ und $x = 2$:

$$\rightsquigarrow \sum_{i=0}^{n-2} i2^i = 2^n(n-2) - 2^{n-1}(n-1) + 2 = 2^n n - 2^{n+1} - 2^{n-1}n + 2^{n-1} + 2$$

$(2) - (3)$:

$$\begin{aligned} n\sum_{i=0}^{n-2} 2^i - \sum_{i=0}^{n-2} i2^i &= n \cdot (2^{n-1} - 1) - 2^n n + 2^{n+1} + 2^{n-1}n - 2^{n-1} - 2 \\ &= 2^{n-1}(2n-1) - 2^n(n-2) - n - 2 \end{aligned}$$

$(1) + (2) - (3)$:

$$\begin{aligned} 2^{n-1} + n\sum_{i=0}^{n-2} 2^i + \sum_{i=0}^{n-2} i2^i &= 2^{n-1} + 2^{n-1}(2n-1) - 2^n(n-2) - n - 2 \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

0.3.5.2 Charakteristisches Polynom

Sei

$$(*)\ \mathrm{f}_n = \mathrm{f}_{n-1} + \mathrm{f}_{n-2} \text{ für } n \geq 2,\ \mathrm{f}_1 = 1,\ \mathrm{f}_0 = 0$$

(lineare homogene Rekursionsgleichung zweiter Ordnung)
Setze $\mathrm{f}_n = a^n$ für ein unbekanntes a.
$a^n - a^{n-1} - a^{n-2} = 0$; da hier $a \neq 0$: $a^2 - a - 1 = 0$; $a_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
a_1 und a_2 Lösungen von $(*)$, dann auch $\mathrm{f}_n = c_1 a_1^n + c_2 a_2^n$ eine Lösung für $(*)$.
$\mathrm{f}_1 = 1$ und $\mathrm{f}_0 = 0$ liefern zwei Gleichungen für c_1 und c_2.
Lösen: $\mathrm{f}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

Satz: Sei $\mathrm{p}(x)$ das charakteristische Polynom der Rekursionsgleichung

$$(**)\ p_0\mathrm{f}_n + p_1\mathrm{f}_{n-1} + \ldots + p_k\mathrm{f}_{n-k} = 0$$

mit den konstanten Koeffizienten p_i. Seien $r_i,\ i = 1, \ldots, m$ die (i. a. komplexen) Wurzeln von $\mathrm{p}(x)$, jeweils mit Vielfachheit m_i. Dann ist die allgemeine Lösung von $(**)$ gegeben durch

$$\mathrm{f}_n = \sum_{i=1}^{m}\left(r_i^n \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}n^j\right),$$

mit beliebigen Konstanten c_{ij}.

0.3.5.3 Erzeugendenfunktionen

$$(\mathrm{f}_n)_{n\geq 0} \mapsto \mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{f}_n z^n; \quad z \in \mathbb{C}$$

Exponentielle Erzeugendenfunktion:

$$(\mathrm{f}_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{f}_n}{n!} z^n$$

auch Notation:

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{n>0} \mathrm{f}_n z^n \Rightarrow \mathrm{f}_n = [z^n]\mathrm{F}(z)$$

Sei $\mathrm{F}(z) = \sum_{n>0} \mathrm{f}_n z^n$ und $\mathrm{G}(z) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{g}_n z^n$

Erzeugendenfunktion	n-tes Folgenglied	Anmerkungen:
$c\mathrm{F}$	$c\mathrm{f}_n$	
$\mathrm{F}+\mathrm{G}$	$\mathrm{f}_n + \mathrm{g}_n$	
$\mathrm{F}\cdot\mathrm{G}$	$\mathrm{h}_n := \sum_{i=0}^{n} \mathrm{f}_i \mathrm{g}_{n-i}$ (Konvolution)	$\left(\sum_{n\geq 0} \mathrm{f}_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} \mathrm{g}_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{h}_n z^n$ (mit $\mathrm{h}_n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{f}_i \mathrm{g}_{n-i}$)
$z^k\mathrm{F}$	<u>if</u> $n < k$ <u>then</u> 0 <u>else</u> f_{n-k} <u>fi</u>	
$\frac{\mathrm{F}(z)}{1-z}$	$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{f}_i$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$
$z\frac{d\mathrm{F}(z)}{dz}$	$n\mathrm{f}_n$	
$\int_0^x \mathrm{F}(t)dt$	<u>if</u> $n = 0$ <u>then</u> 0 <u>else</u> $\frac{\mathrm{f}_{n-1}}{n}$ <u>fi</u>	$\mathrm{f}_n z^n$ („geht über auf“) $\mathrm{f}_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$
$\mathrm{F}(cz)$	$c^n \mathrm{f}_n$	$\mathrm{F}(cz) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{f}_n (cz)^n = \sum_{n\geq 0} \mathrm{f}_n c^n z^n$

Beispiel:

$$\mathrm{F}(z) := \sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$$

$$\mathrm{G}(z) := \sum_{n\geq 0} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{F}(z)\mathrm{G}(z) = \frac{z}{(1-z)^2(1-2z)} = \sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n} (n-i)2^i z^n$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{z}{(1-z)^2(1-2z)} &= \overbrace{\frac{-2}{(1-z)}}^{(1)} - \frac{-z}{(1-z)^2} + \overbrace{\frac{2}{1-2z}}^{(2)} \\ &= \underbrace{\sum_{n\geq 0} 2^{n+1} z^n}_{(2)} - \sum_{n\geq 0} n z^n - \underbrace{2\sum_{n\geq 0} z^n}_{(1)};\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} 2^i (n-i) &= [z^n](\mathrm{FG})(z) \\ &= [z^n]\left(\sum_{n\geq 0} (2^{n+1} - n - 2) z^n\right) \\ &= 2^{n+1} - n - 2;\end{aligned}$$

0.3.5.4 Transformation des Definitions- bzw. Wertebereichs

Beispiel 1:

$\mathrm{f}_n = \mathrm{f}_{n-1} \cdot \mathrm{f}_{n-2}$ für $n \geq 2$;
$\mathrm{f}_1 = 2;\ \mathrm{f}_0 = 1$

$$\begin{aligned}
\text{Setze: } & \mathrm{g}_n = \log \mathrm{f}_n \\
\Rightarrow\ & \mathrm{g}_n = \mathrm{g}_{n-1} + \mathrm{g}_{n-2} \text{ für } n \geq 2 \\
& \mathrm{g}_1 = \log 2 = 1,\ \mathrm{g}_0 = 0 \text{ für } \log = \log_2 \\
& \mathrm{g}_n = \mathrm{F}_n\ n\text{-te Fibonacci-Zahl} \\
\Rightarrow\ & \mathrm{f}_n = 2^{\mathrm{F}_n}
\end{aligned}$$

Beispiel 2:

$\mathrm{f}_n = 3\mathrm{f}_{\frac{n}{2}} + n$ für $n = 2^k$;
$\mathrm{f}_1 = 1$

$$\begin{aligned}
\text{Setze: } \mathrm{g}_k &= \mathrm{f}_{2^k} \\
\text{Dann: } \mathrm{g}_k &= 3\mathrm{g}_{k-1} + 2^k,\ k \geq 1 \\
\mathrm{g}_0 &= 1 \\
\text{Es ergibt sich: } \mathrm{g}_k &= 3^{k+1} - 2^{k+1},\ \text{also} \\
\mathrm{f}_n &= 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k \\
&= 3(2^{\log 3})^k - 2 \cdot 2^k \\
&= 3(2^k)^{\log 3} - 2 \cdot 2^k \\
&= 3n^{\log 3} - 2n
\end{aligned}$$