Technische Universität München
Institut für Informatik

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen
WS 1997/98 - Kapitel 5

Stand: 13. März 1998

Dozent:

Prof. Dr. Ernst W. Mayr

Mitschrift:

Martin Stumpf
Thomas Schöpf
Martin Hans
Guido Wimmel

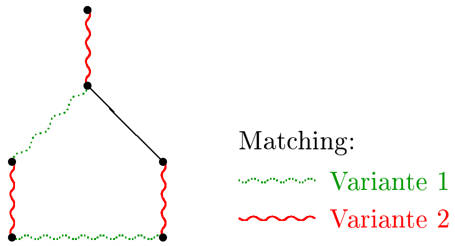
Inhaltsverzeichnis

Kapitel 5

Matchings in Graphen

5.1 Grundlagen

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, schlichter Graph. Ein Matching M in G ist eine Teilmenge von E, so daß keine zwei Kanten aus M einen Endpunkt gemeinsam haben.



Definition:

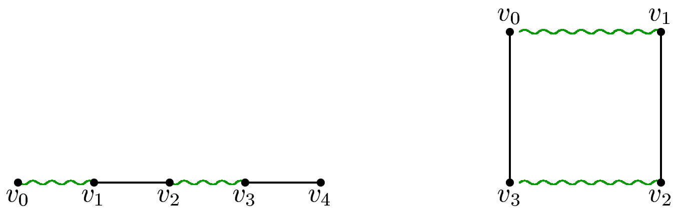
1. Ein Matching M in $G = (V, E)$ heißt perfekt (oder vollkommen), falls

   $$|M| = \frac{|V|}{2}$$

2. Ein Matching M heißt „Matching maximaler Kardinalität“ (engl. maximum matching) in G, falls es in G kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt. ($\rightarrow$ durchgehend geringelt (rot) im Beispiel)
3. Ein Matching M heißt maximal in G, falls es bezüglich „$\subseteq$“ maximal ist. (engl. maximal matching, $\rightarrow$ gepunktet geringelt (grün) im Beispiel)

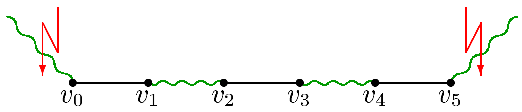
Definition:

1. Ein einfacher Pfad (Kreis) $v_0, v_1, \ldots, v_r$ heißt alternierend bzgl. eines Matchings M, falls die Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \leq i < r$, abwechselnd in M und nicht in M liegen.



gerade Länge

2. Ein alternierender Pfad heißt augmentierend, falls er bzgl. „$\subseteq$“ maximal ist und an beiden Enden ungematchte Kanten hat.



ungerade Länge

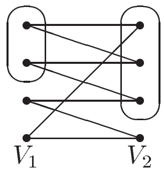
Bemerkung: Es kann keine augmentierenden Kreise geben.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wenn V in zwei nichtleere Teilmengen V_1 und V_2 partitioniert werden kann ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), so daß $E \subseteq V_1 \times V_2$ ist, so heißt G bipartit ($G = (V_1, V_2, E)$).

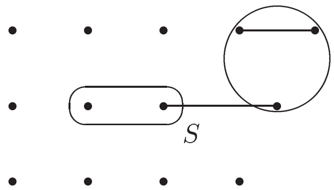
Heiratssatz: (Frobenius, Hall, Rado, König)
Sei $G = (V_1, V_2, E)$ ein bipartiter Graph. G enthält ein Matching der Kardinalität $|V_1|$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall V \subseteq V_1 : |N(V)| \geq |V|,$$

wobei N(V) die Nachbarschaft von V (in V_2) bezeichnet.



Satz: (Tutte, 1947)
Ein Graph $G = (V, E)$ hat ein perfektes Matching genau dann, wenn $|V|$ gerade ist und es kein $S \subseteq V$ gibt, so daß der durch $V \setminus S$ induzierte Teilgraph mehr als $|S|$ Zusammenhangskomponenten ungerader Größe enthält.

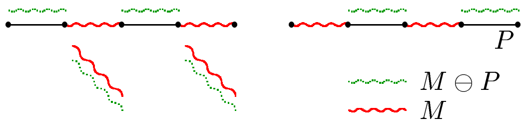


Satz: (Berge, 1957)
Ein Matching hat maximale Kardinalität genau dann, wenn es keinen augmentierenden Pfad dafür gibt.

Definition: Seien S, T zwei Mengen, dann bezeichne $S \ominus T$ die symmetrische Differenz von S und T, d.h. $S \ominus T = (S - T) \cup (T - S)$.

Lemma: Sei M ein Matching, P ein augmentierender Pfad bzgl. M. Dann ist auch $M \ominus P$ ein Matching und es gilt $|M \ominus P| = |M| + 1$.

Beweis:
„$\Leftarrow$“



„$\Rightarrow$“ Satz von Berge □

Lemma: Seien M, N Matchings in G, und sei $|N| > |M|$. Dann enthält $N \ominus M$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte augmentierende Pfade bzgl. M.

Beweis: Der Grad eines Knotens in $(V,\ N \ominus M)$ ist ≤ 2.
Die Zusammenhangskomponenten von $(V,\ N \ominus M)$ sind also

1. isolierte Knoten
2. einfache Kreise (gerade Länge)
3. alternierende Pfade

Seien $C_1, \ldots, C_r$ die Zusammenhangskomponenten in $(V,\ N \ominus M)$ dann gilt:

$$M \ominus \underbrace{C_1 \ominus C_2 \ominus \ldots \ominus C_r}_{N \ominus M} = N$$

Nur die C_i's die augmentierende Pfade bzgl. M sind, vergrößern die Kardinalität des Matchings und zwar jeweils um genau 1. Also muß es mindestens $|N| - |M|$ C_i's geben, die augmentierende Pfade bzgl. M sind (ev. knotendisjunkt da ZHK's). □

Korollar: Satz von Berge

Lemma: Sei M ein Matching der Kardinalität r, und sei s die maximale Kardinalität eines Matchings in $G = (V, E)$. Dann gibt es einen augmentierenden Pfad bzgl. M der Länge $\leq 2\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor + 1$, wobei $s > r$ vorausgesetzt sei.

Beweis: Sei N ein Matching maximaler Kardinalität in G, $|N| = s$. $N \ominus M$ enthält $\geq s - r$ augmentierende Pfade bzgl. M, die alle knotendisjunkt und damit auch kantendisjunkt sind. Einer dieser augmentierenden Pfade enthält daher $\leq \lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor$ Kanten aus M. □

Lemma: Sei P ein kürzester augmentierender Pfad bzgl. M und sei P' ein augmentierender Pfad bzgl. des neuen Matchings $M \ominus P$. Dann gilt:
$|P'| \geq |P| + 2|P \cap P'|$

Beweis: $N = M \ominus P \ominus P'$, also $N = |M| + 2$. Also enthält $M \ominus N$ mindestens 2 knotendisjunkte augmentierende Pfade bzgl. M, etwa $P_1,\ P_2$. Es gilt:

$N \ominus M = P \ominus P'$, also

$|P \ominus P'| \overset{\text{Def.}}{=} |(P - P') \cup (P' - P)| = |P| + |P'| - 2|P \cap P'| \geq |P_1| + |P_2| \geq 2|P|$,

also $|P| + |P'| - 2|P \cap P'| \geq 2|P|$, also

$|P'| \geq \underbrace{2|P| - |P|}_{|P|} + 2|P \cap P'|$

□

Schema für Matching Algorithmus:

1. Beginne mit Matching $M_0 := \emptyset$.
2. Berechne Folge $M_0,\ P_0,\ M_1,\ P_1, \dots,\ M_i,\ P_i, \dots$ Wobei jeweils P_i ein kürzester augmentierender Pfad bzgl. M_i ist und $M_{i+1} = M_i \ominus P_i$.

Es gilt: $|P_{i+1}| \geq |P_i|$

Lemma: Seien P_i und P_j in obiger Folge zwei augmentierende Pfade gleicher Länge. Dann sind P_i und P_j knotendisjunkt.

Beweis: Annahme: es gibt eine Folge $(P_k)_{k\geq 0}$ mit $|P_i| = |P_j|$, $j > i$, $P_i \cap P_j \neq 0$, $j - i$ minimal gewählt. Durch die Wahl von j sind die Pfade $P_{i+1}, \dots, P_j$ knotendisjunkt. Also ist P_j ein augmentierender Pfad bzgl. M', dem Matching nach dem augmentieren mit $P_0,\ P_1, \dots,\ P_i$. Mit vorigem Lemma: $|P_j| \geq |P_i| + 2|P_i \cap P_j|$ also $P_i,\ P_j$ kantendisjunkt. Da in M' jeder Knoten in P_i gematcht ist (und auch in $M' \ominus P_{i+1} \ominus P_{i+2} \ominus \dots \ominus P_{j-1}$) können P_i und P_j auch keinen Knoten gemeinsam haben. □

Satz: Sei s die maximale Kardinalität eines Matchings in $G = (V, E)$. Dann enthält die Folge $|P_0|, |P_1|, \dots$ höchstens $\lfloor 2\sqrt{s} + 1 \rfloor$ verschiedene Werte.

Beweis: Sei $r := \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$. Per Konstruktion ist $|M_i| = i$, also $|M_r| = r$. Mit dem Lemma über die maximale Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades folgt

$$|P_r| \quad \leq \quad 2\left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \quad \leq \quad 2\left\lfloor \frac{s}{\sqrt{s}} \right\rfloor + 1 \quad = \quad 2\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1.$$

Für $i \leq r$ ist also $|P_i|$ eine der ungeraden Zahlen in $[1, 2\sqrt{s} + 1]$, also eine von $\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1$ ungeraden Zahlen. $P_{r+1}, \dots, P_{s-1}$ tragen höchstens $s - r - 1 < \sqrt{s}$ zusätzliche Längen bei. □

Verfeinertes Schema:

$M := \emptyset$;
while $\exists$ augmentierender Pfad bzgl. M do
  $l :=$ Länge des kürzesten augmentierenden Pfades bzgl. M;
  bestimme eine bzgl. „$\subseteq$“ maximale Menge $\{Q_1, \dots, Q_m\}$
  augmentierender Pfade bzgl. M, die alle Länge l haben und knotendisjunkt sind;
  $M := M \ominus Q_1 \ominus \dots \ominus Q_m$;
od

Korollar: In obiger *while*-Schleife finden höchstens $\mathcal{O}\left(|V|^{\frac{1}{2}}\right)$ Durchläufe statt.

5.2 Matchings maximaler Kardinalität in bipartiten Graphen

Gegeben: $G = (V_1, V_2, E)$ bipartiter Graph.

Simultane BFS zur Bestimmung der Länge eines kürzesten augmentierten Pfades.

```
for alle v ∈ V1 ∪ V2 do
    label[v] := 0;
od
R := ∅; l := 1;
for alle freien Knoten v ∈ V1 do
    for alle Kanten {v, w} ∈ E do
        label[w] := 1; R := R ∪ {w};
    od
od
while R ≠ ∅ and R enthält keinen freien Knoten do
    L := ∅; l++;
    for alle w ∈ R, {v, w} ∈ M do
        L := L ∪ {v};
        label[v] := l;
    od
    R := ∅; l++;
    for alle v ∈ L, {v, w} ∈ E \ M do
        if label[w] = 0 then
            R := R ∪ {w};
            label[w] := l;
        fi
    od
od
R := Menge der freien Knoten in R;
```